Faktorisering

Per G. Østerlie
Senter for IKT i utdanningen
per@osterlie.no

11. mai 2013

1 Hva er faktorisering?

Vi må se på verbet «å faktorisere». Hva er det vi skal gjøre når vi faktoriserer? Svaret er: å lage faktorer. Faktorisering er å lage faktorer.

Hva en faktor er? Faktorer utgjør et produkt. Vi multipliserer sammen faktorene for å få produktet.

$$\text{faktor} \cdot \text{faktor} = \text{produkt}$$

Et eksempel er:

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$

Nå blir oppgaven vår å lage faktorer. Det er ikke produktet vi skal finne, men faktorene. Oppgaven blir den omvendte.

$$\text{produkt} = \text{faktor} \cdot \text{faktor}$$

Eller:

$$30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$$

2 Hvorfor skal vi faktorisere?

En viktig anvendelse av faktorisering er innafor kryptering. Sikkerheten i dataverdenen avhenger av at det er vanskelig å faktorisere store tall. Den som kan finne opp en ny og revolusjonerende algoritme for faktorisering kan enten bli en berømt matematiker eller en rik svindler. Ingen av de to skal være målet i dette faget. Når vi ønsker å finne faktorer kan det være for å forkorte i brøker eller for å løse ulikheter eller likninger. Da vil det oppstå et behov for å skrive om uttrykk som faktorer. Når vi skal faktorisere er det flere metoder vi kan benytte. Hvilke skal vise på her.

3 Enkel faktorisering

I noen tilfeller kan vi faktorisere direkte ved å se hvilke faktorer som inngår i et uttrykk. Vi starter enkelt med å faktorisere et helt tall

Faktorisering av et tall

Noen eksempler.

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 100 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \\ 1066 &= 2 \cdot 13 \cdot 41 \end{aligned}$$

Når vi faktoriserer tallene vil faktorene være primtall. Tall kan også skrives med variabler. Til det benytter vi bokstaver. Da kan vi faktorisere slik

$$\begin{aligned} 4 \cdot a &= 2 \cdot 2 \cdot a \\ a^2 \cdot b &= a \cdot a \cdot b \\ 10 \cdot x^3 \cdot y^2 &= 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \end{aligned}$$

Da skal vi se på faktorisering hvor vi har flere ledd.

Faktorisering av enkle uttrykk med flere ledd

I uttrykk med flere ledd skal vi legge sammen eller trekke fra leddene. Her er noen eksempel på flerledda uttrykk.

$$\underbrace{6}_{\text{ledd}} + \underbrace{4}_{\text{ledd}}$$

$$\underbrace{a^2}_{\text{ledd}} + \underbrace{3 \cdot a}_{\text{ledd}}$$

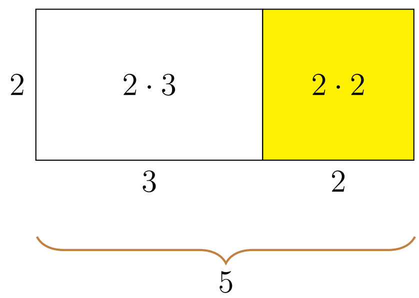
La oss prøve å faktorisere de to uttrykkene. Det første, $6 + 4$, er en annen måte å skrive 10 på. Da vet vi at uttrykket kan faktoriseres til $2 \cdot 5$. Vi kan se at det stemmer når vi faktoriserer hvert ledd og setter felles faktorer utenfor en parentes.

$$6 + 4$$

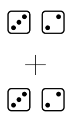
$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$2 \cdot (3 + 2)$$

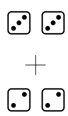
Det står 10 der også, så det stemmer. I faktoriseringen er det viktig å huske den distributive loven. La oss se litt mer på den. Figuren under viser et rektangel med areal 10. Lengden av sidene er 2 og 5. Sida som er 5 er delt i to deler, en del er 3 og en 2. Arealet er produktet av de to sidene. Nå kan vi se at den distributive loven stemmer. $2 \cdot (3 + 2) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$ Vi kan lage figur uten å si noe om lengden av sidene og lengdene i de to delene. Da blir figuren slik:



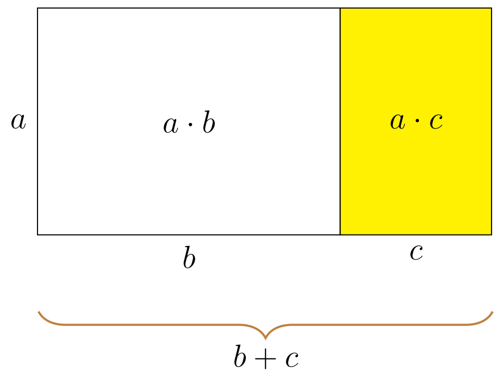
Vi kan vise det samme med terninger. Ser vi føst på $2 \cdot (3 + 2)$, så står det to ganger innholdet i parentesen, eller $(3 + 2) + (3 + 2)$. Slik kan vi tenke oss det samme med terninger.



Vi ender også opp med samme antall øyne om vi setter opp terningene som $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$. Det kan vi gjøre slik:



Terningene og arealet kan forklare den distributive loven i dette tilfellet. Vi kan forklare at det samme gjelder uansett hvilke tall i et generelt tilfelle.



Figuren viser at:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Den distributive loven er viktig når vi faktoriserer.

Da tar vi for oss det andre uttrykket.

$$a^2 + 3 \cdot a$$

$$a \cdot a + 3 \cdot a$$

$$a \cdot (a + 3)$$

Legg merke til at det først er i siste linje vi har faktorisert hele uttrykket. I andre linje har vi bare faktorisert de enkelte leddene. Først når vi står igjen med to faktorer, a og $(a + 3)$, har vi faktorisert hele uttrykket.

Vi kan ta med et eksempel til. La oss faktorisere uttrykket: $9 \cdot x^2 - 3 \cdot x$. Det kan vi gjøre slik.

$$\begin{aligned} 9 \cdot x^2 - 3 \cdot x & \\ 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x - 3 \cdot x & \qquad \text{faktoriserer leddene} \\ {\color{blue}3} \cdot 3 \cdot {\color{blue}x} \cdot x - {\color{blue}3 \cdot x} & \qquad \text{finner felles faktorer} \\ {\color{blue}3 \cdot x} \cdot (3 \cdot x - 1) & \qquad \text{setter utenfor parentes} \end{aligned}$$

4 Kvadratsetningene

De tre kvadratsetningen skriver vi slik.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{3}$$

1. kvadratsetning

Den første kvadratsetningen er summen av et kvadrat.

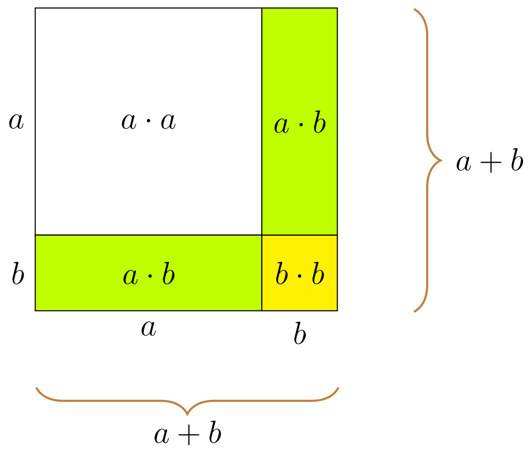
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Benytter vi den distributive loven kan vi vise at denne setningen stemmer.

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)\cdot(a+b)$$
$$a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$a^2 + ab + ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

Det samme kan vi vise ved å se på arealet til et kvadrat med sider $a+b$.



2. kvadratsetningen

Den andre kvadratsetningen er det differensen som kvadreres. Vi kan regne ut og vise at den stemmer.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

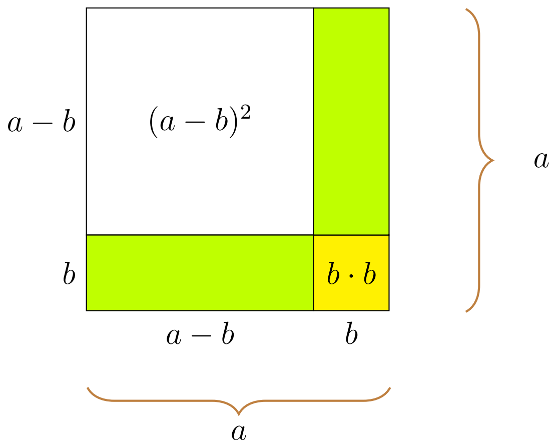
Benytter vi den distributive loven kan vi vise at denne setningen stemmer.

$$(a-b)^2$$

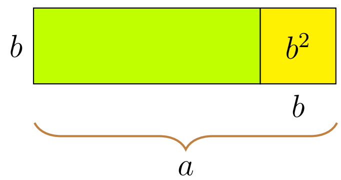
$$(a-b)\cdot(a-b)$$

$$a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$
$$a^2 - ab - ab + b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$

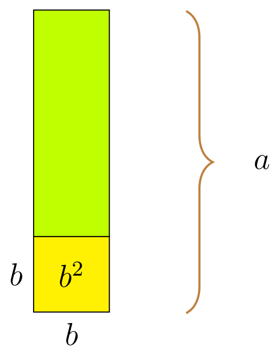
Det samme kan vi vise ved å se på arealet til et kvadrat med sider $a - b$.



Kvadratet over har sider med lengde a. På hver side er lengden b markert. Lengden av resten av sidene blir da $a - b$. Arealet av hele kvadratet er a^2. For å finne arealet av $a - b$ kan vi ta arealet av hele det store kvadratet. Nå må vi trekke fra dette arealet som er $a \cdot b$:



Vi trekker også fra dette arealet, som også er $a \cdot b$:



Da har vi trukket fra b^2 to ganger. Vi må legge til b^2 for å komme fra til arealet av kvadratet med side $a - b$. Det forklarer at $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. kvadratsetning

Den tredje kvadratsetningen forklares nok enklest ved at vi regner ut og viser at den stemmer algebraisk.

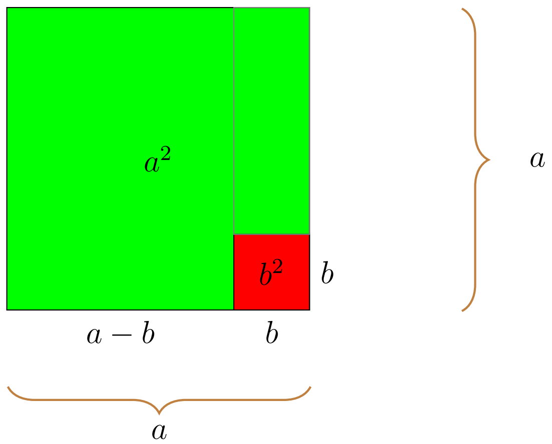
$$(a-b)(a+b)$$

$$a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b$$

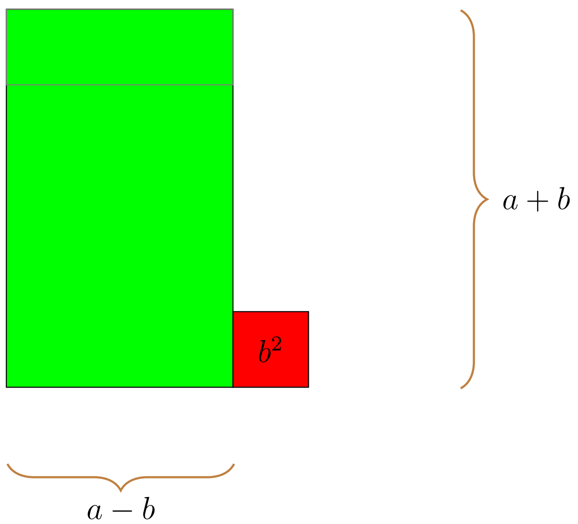
$$a \cdot a - b \cdot b$$

$$a^2 - b^2$$

Vi kan vise det med arealer også, men det er litt mer innviklet enn med de to forrige tilfellene. La oss allikevel prøve og vi tar utgangspunkt i denne figuren.



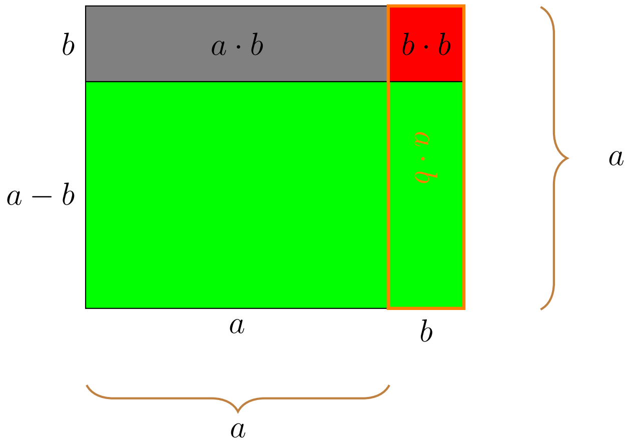
Vi flytter arealet over det røde kvadratet og ender opp med denne figuren.



Det grønne arealet er$(a-b)(a+b)$ Vi har at $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Et annet alternativ er å se på figuren under.

Arealet med denne fargen viser arealet av $(a-b)(a+b)$



Vi kan finne det arealet $(a+b)(a-b)$ ved å ta arealet a^2 og trekke fra arealet $a \cdot b$ med fargen . Vi må legge til arealet $a \cdot b$ som er rammet inn slik: . Da ender vi opp med et areal som er litt for stort. Vi må trekke fra arealet $b \cdot b$ med fargen . Ja, det er litt komplisert, men bruk litt tid på figuren.

Faktorisering med kvadratsetningene

Du har du kanskje benyttet til å regne ut kvadratene, men når vi skal faktorisere kan vi benytte kvadratsetngene "andre veien". Ser vi et uttrykk som $a^2 + 2ab + b^2$ kan vi skrive om det til $(a+b)^2$. Faktorisering med kvadratsetningene blir derfor å bruke setningene omvendt, fra venstre mot høyre.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

La oss se på et eksempel hvor $a = 3$ og $b = 7$:

$$3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 7^2 = (3+7)^2$$

Som regel vil vi faktorisere flerledda uttrykk, polynom, med en ukjent, x. Et eksempel på det er dette:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x-1)^2$$

Kjenner du igjen den andre kvadratsetningen?

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$$

I eksemplet over er $a = x$ og $b = 1$.

Legg merke til mønstret i uttrykket som faktoriseres. Det må være på formen.

$$\square^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$$

Bytt ut $\square$ med ett tall og $\square$ med et annet tall.

Alle andregradsuttrykk som kan faktoriseres ved de to første kvadratsetningene kaller vi *fullstendige kvadrater*. Alle fullstendige kvadrater er på formen over(tegnene)

Noen eksempler:

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x+4)^2 \\
x^2 + 14x + 49 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = (x+7)^2 \\
x^2 - 14x + 49 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = (x-7)^2 \\
x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2
\end{aligned}$$

Et uttrykk med litt større tall er dette:

$$x^2 + 53072546x + 704173784730529 = (x + 26536273)^2$$

Greier du å se at faktoriseringen stemmer?

Andregradsuttrykkene vi vil benytte i dette kurset kan vi generelt skrive som $x^2 + bx + c$.

For å sjekke om et andregradsuttrykk er et fullstendig kvadrat må vi se om $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Bare da er har vi et fullstendig kvadrat. La oss se hvordan vi kan vise at det er sånn.

$$x^2 + bx + c \qquad \text{erstatter } c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \text{Skriver om}$$

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Vi ser mer på hvordan dette stemmer i eksemplene over.

$$x^2 - 2x + 1$$

Her er $b = -2$. Så regner vi ut $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Da får vi $(\frac{-2}{2})^2 = (-1)^2 = 1$. I uttrykket ser vi at også $c = 1$. Det betyr at $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Dette er derfor et fullstendig kvadrat og vi kan faktorisere.

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x-1)^2$$

Ok, her var det kanskje enklere å se direkte av uttrykket? Vi kan se på noen andre fullstendige kvadrat.

uttrykk	b	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	c	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$**?**
$x^2 - 2x + 1$	-2	$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$	$c = 1$	✓
$x^2 + 8x + 16$	8	$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$	$c = 16$	✓
$x^2 + 14x + 49$	14	$\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49$	$c = 49$	✓
$x^2 - 14x + 49$	-14	$\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49$	$c = 49$	✓

Hva med det stygge uttrykket: $x^2 + 53\,072\,546x + 704\,173\,784\,730\,529$? Jo, her er

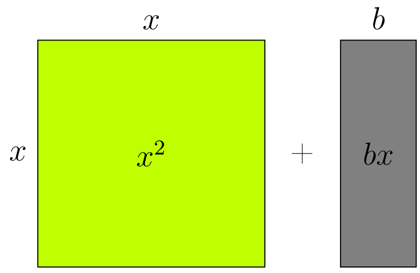
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{53\,072\,546}{2}\right)^2 = 704\,173\,784\,730\,529$$

og dermed lik $c = 704173784730529$. Da er også det et fullstendig kvadrat.

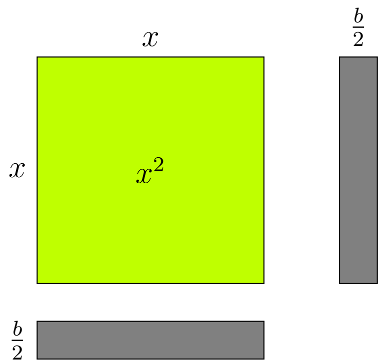
Kanskje vi skal ta med noen eksempel hvor det ikke er tilfelle? Se her.

uttrykk	b	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	c	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$?
$x^2 - 2x + 3$	-2	$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$	$c = 3$	$\times$
$x^2 + 4x + 16$	8	$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$	$c = 16$	$\times$

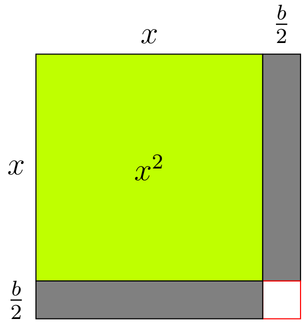
Slik kan vi finne ut om vi det er fullstendige kvadrat. Navnet fullstendig kommer fra geometrien og vi kan se på noen figurer som forklarer ordet og de utregningene vi har gjort så langt. Vi starter med $x^2 + bx$



Vi deler opp arealet bx i to deler. Så flytter vi det ene.



Setter vi dette sammen kan vi se at vi mangler ett kvadrat for at hele figuren skal bli et kvadrat. Det lille kvadratet vi mangler er et kvadrat med sidene $\frac{b}{2}$.



Det figuren viser er at hvis det siste leddet, som vi har kalt c er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, så har vi et fullstendig kvadrat.

5 Fullstendige kvadraters metode

Hva om vi har et andregradspolynom som ikke er et fullstendig kvadrat? Da går det an å prøve å lage seg et fullstendig kvadrat og så prøve å faktorisere. Det kalles fullstendige kvadraters metode. La oss se litt på hvordan vi kan gjøre det. Vi ser på andregradspolynomet

$$x^2 - 2x - 3$$

Her ser vi at $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$ og at $c = 3$. Nei, da er det ikke et fullstendig kvadrat. Skulle det vært det måtte $c = 1$. Vi kan skrive om slik at deler av uttrykket blir et fullstendig kvadrat:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{fullstendig kvadrat}} + \underbrace{-1}_{\text{trekker fra det vi la til}} -3$$

Det står faktisk det samme som vi hadde i utgangspunktet: $x^2 - 2x - 3$ siden $1 - 1 = 0$. Da fortsetter vi med uttrykket vi hadde og regner litt videre.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4$$

Det fullstendige kvadratet kan vi faktorisere:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$$

Da har vi:

$$(x - 1)^2 - 4$$

Vi skriver om det siste leddet og får:

$$(x-1)^2 - 2^2$$

Virker dette kjent? Er det ikke den tredje kvadratsetningen? Det er kanskje ikke så lett å se, men legg merke til at uttrykket er på formen

$$\square^2 - \square^2$$

I vårt tilfelle står det:

$$(x-1)^2 - 2^2$$

Den kan vi bruke til å faktoriser.

$$(x-1)^2 - 2^2 = ((x-1)+2)((x-1)-2)$$

Da ender vi opp med disse faktorene:

$$(x+1)(x-3)$$

Vi har faktorisert uttrykket og funnet ut at:

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

Dette er ikke enkelt og vil nok kreve at du ser på det en del ganger. Kanskje et eksempel til vil hjelpe? Da ser vi på:

$$x^2 + 8x + 12$$

Det er heller ikke et fullstendig kvadrat. Her er $b = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ og $c = 12$. Da lager vi et fullstendig kavdrat og gjør det på samme måten som sist.

$$x^2 + 8x + 12$$

$$\underbrace{x^2 + 8x + 16}_{\text{fullstendig kvadrat}} - 16 + 12$$

$$(x+4)^2 - 4$$

$$(x+4)^2 - 2^2$$

$$((x+4)-2)((x+4)+2)$$

$$(x+2)(x+6)$$