

Integraler

Per G. Østerlie

27. april 2017

1	Introduksjon	4
1.1	Hvorfor integraler?	4
1.2	Arealet under grafen	4
1.3	En inndeling av arealet	5
1.4	Antiderivasjon	9
1.5	Vi finner arealet ved integralregning	10
1.6	Svaret på den opprinnelige oppgaven	12
2	En definisjon av et integral	14
2.1	En tilnærming til arealet under grafen	14
2.2	En Riemansum	15
2.3	En finere oppdeling	17
2.3.1	Hva om vi har uendelig mange rektangler?	18
2.4	Arealet ved integrasjon	19
2.5	Det bestemte integralet	19
2.5.1	Det bestemte integralet og areal	20
2.5.2	Det bestemte integralet og antiderivasjon	21
3	Ubestemte integral	23
3.1	En definisjon av ubestemte integral	23
3.2	Integralregning med digitale verktøy	23
3.2.1	WolframAlpha	24
3.2.2	GeoGebra	24
3.2.3	TI-Nspire	24
3.2.4	Praktisk bruk	25
3.3	Noen regler for integrasjon	26
3.4	Noen ord og uttrykk	27
4	Analysens fundamentalsetning	28
4.1	Analysens fundamentalsetning	28
5	Noen praktiske eksempler	30
5.1	Omsetting i en bedrift	30
5.2	Volumet av ei kule	33
5.3	Volumet av en trekanta pyramide	35
A	Vedlegg	37

A.1	Hvor kommer integraltegnet fra?	37
-----	---	----

Her har jeg samla sammen en del om integraler. Det meste av det vi har vært gjennom på samlingene skal du finne her.

Vi rakk ikke å se på analysens fundamentalsetning, som viser hvorfor sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon stemmer. Det kan du lese om her.

Ellers kan jeg ikke garantere at det ikke er noen skrivefeil her og der. Si fra hvis dere finner enten det eller noe annet som bør korrigeres.

Teksten er skrevet med L^AT_EX.



Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0 Internasjonal Offentlige Lisens

1 Introduksjon

1.1 Hvorfor integraler?

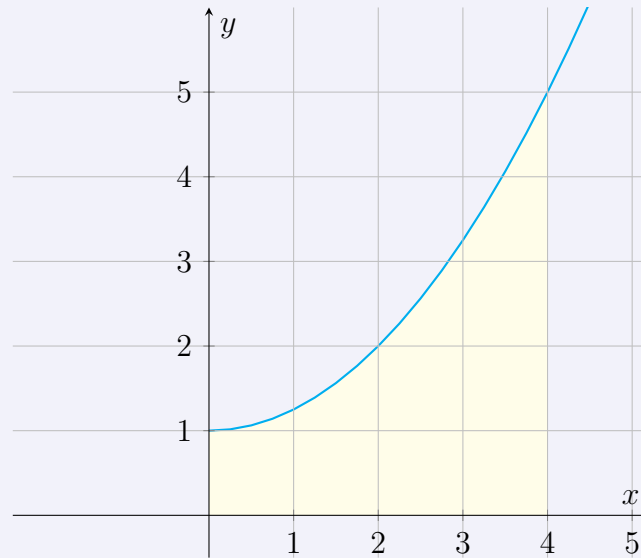
Elever spør ofte «hvorfor skal vi lære det her?». I temaet integralregning, eller integrasjon, kan det være enklere å forklare elevene enn i andre tilfeller. Integralregninga kan i mange tilfeller knyttes direkte til praktiske tilfeller. Gjennom integraler kan vi finne størrelsen av areal eller finne farten når vi vet avstanden. Når integrasjon er direkte knytta til praktiske tilfeller skyldes nok det også opphavet til denne delen av matematikken: En ønsket å forklare fysiske fenomener. Derivasjon er nært beslekta med integrasjon. Kanskje har du også sett at derivasjon kan knyttes til praktiske situasjoner. Nå skal vi snart se at integrasjon er en «omvendt» derivasjon. Mer om det seinere, men her er en liten forsmak

1.2 Arealet under grafen

Å knytte integralregning til arealet under en kurve er en «klassisk» innfalls-vinkel. Integralregning kan gi svaret på denne oppgaven.

Oppgave 1

Hva er arealet av området avgrensa av grafen til funksjonen, y-aksen og linja $x = 4$?



Før vi finner svaret på oppgaven skal vi se litt mer på noen grunnleggende ideer for integrasjon.

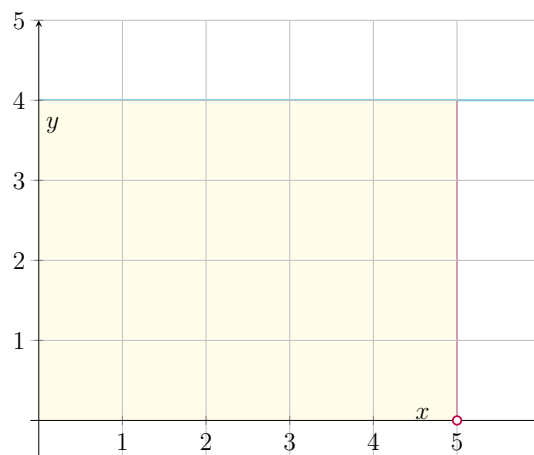
1.3 En inndeling av arealet

La oss finne arealet avgrenset av en graf og x-aksen til noen enkle grafer.

Oppgave 2

Finn arealet avgrenset av grafen til $f(x) = 4$, x-aksen og linja $x = 5$

Her er grafen tegnet i et koordinatsystem.



Oppgaven bør være overkommelig. Arealet er 20. Svaret kan vi se som et arealet dannet av de 20 rutene. Vi finner det ved multiplikasjon av sidene i rektanglet: $5 \cdot 4$.

En tankegang som vi skal ta med oss videre er at arealet kunne vi også funnet ved å dele inn i mindre deler. I figur 1.1 ser vi hvordan vi finner det samme arealet ved å dele i lengden 5 i flere deler

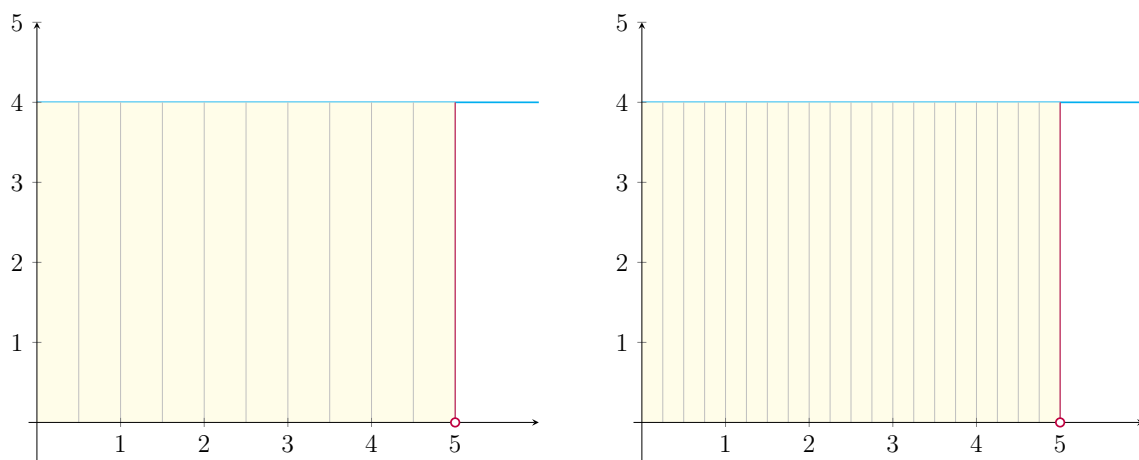
$$10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 20$$

$$20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 20$$

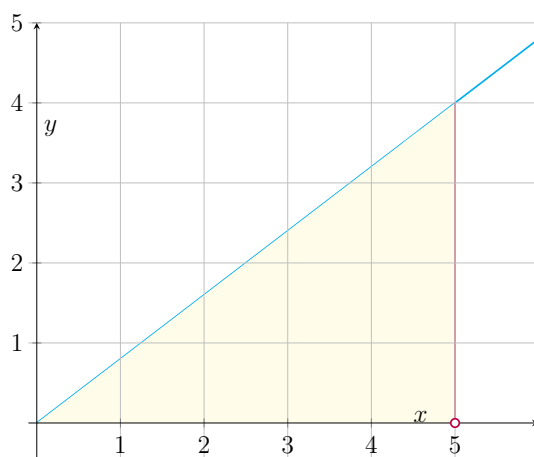
Sjøl om ikke det var den mest effektive måten å finne arealet på i dette tilfellet, skal vi se at framgangsmåten er viktig for tankegangen bak integrasjon.

Oppgave 3

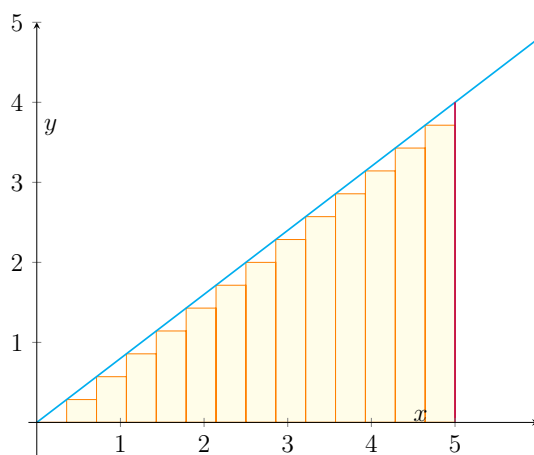
Finn arealet avgrenset av grafen til $f(x) = \frac{4}{5}x$, x-aksen og linja $x = 5$



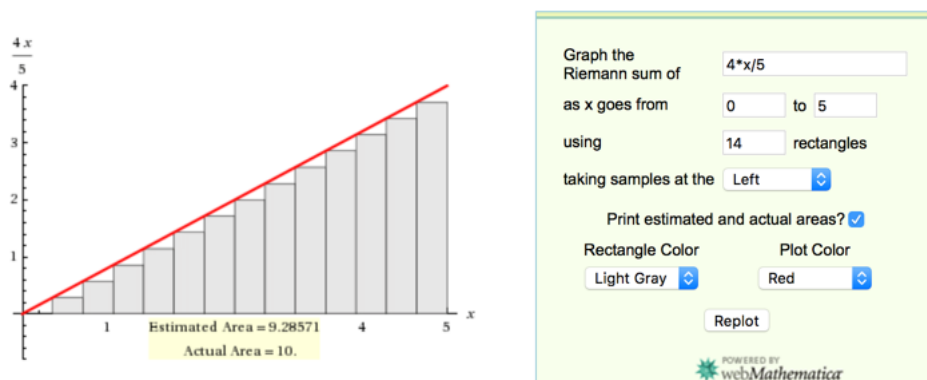
Figur 1.1: Inndelinger



Grunnen til at denne funksjonen er valgt er at arealet må bli halvparten av det forrige vi så på, altså 10. Vi vet arealet, men la oss prøve å finne det ved en oppdeling i rektangler. Her er arealet delt inn i fjorten deler.



Å regne ut arealet av rektanglene lar vi teknologien ta seg av. Stor sett alle graftegnere har en kommando for slike beregninger. I figure 1.2 ser vi hvordan Wolfram¹ har funnet arealet til å være 9.29. Vi har en god tilnærming til arealet under grafen.



Figur 1.2: Arealet av fjorten rektangler

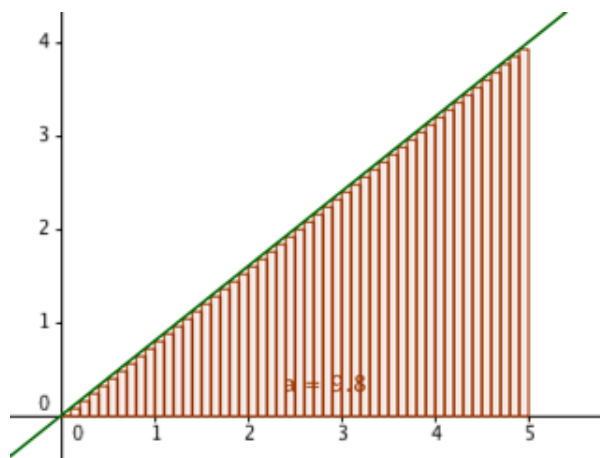
Vi prøver med femti inndelinger i GeoGebra. Etter å ha definert funksjonen som f er kommandoen

$$\text{SumUnder}[f, 0, 5, 50]$$

I figur 1.3 blir arealet nå beregna til 9.8.

Desto flere inndelinger jo nærmere kommer vi til arealet. Dette minner kanskje om grenseverdier? Vi skal se at det er akkurat det, men foreløpig kan vi kalle det bare det bestemte integralet fra 0 til 5 av funksjonen $f(x) = \frac{4}{5}x$. Vi skriver det slik

¹<http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html>



Figur 1.3: Arealet av femti rektangler

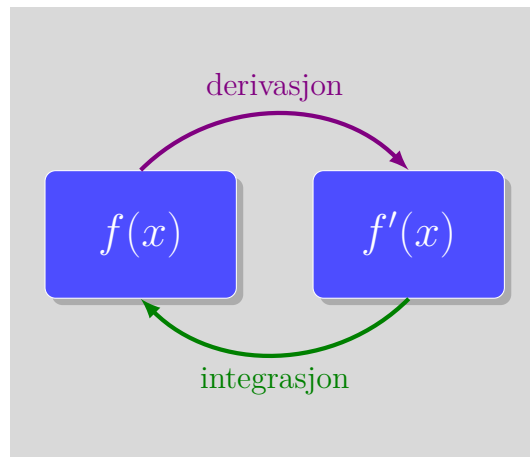
$$\int_0^5 f(x) dx$$

Vi kaller dette et bestemt integral. Her har vi en startverdi, $x = 0$ og en sluttverdi, $x = 5$. Det er arealet under funksjonen f vi skal finne. Til slutt er det markert at x er variabelen ved at det står dx .

Integralregning består i å finne integraler. Et første steg er da å se på integrasjon som det motsatte av derivasjon: *antiderivasjon*

1.4 Antiderivasjon

Vi skal også se at å integrere vil si å kunne finne uttrykket til en funksjon når vi vet uttrykket til den deriverte. Å finne den deriverte funksjonen kaller vi å derivere. Vet vi den deriverte funksjonen og skal finne den opprinnelige, kaller vi det integrasjon.



En typisk oppgave kan da være

Oppgave 4

Gitt $f'(x) = 2x$. Finn $f(x)$.

Med litt erfaring fra derivasjon kan vi finne svaret hvis vi kjenner igjen at

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$$

Skriver vi dette med integraltegn får vi

$$\int 2x \, dx = x^2$$

1.5 Vi finner arealet ved integralregning

Nå tilbake til oppgave 3 hvor vi endte opp med at arealet kunne skrives som et integral. En omskriving av oppgaven blir da

Oppgave 5

Finn

$$\int_0^5 \frac{4}{5}x \, dx$$

Vi starter med å se bort fra grensene og konsentrerer oss om å finne

$$\int \frac{4}{5}x \, dx$$

Altså: Finn $f(x)$ når vi vet at $f'(x) = \frac{4}{5}x$

Her må vi nok bare prøve oss fram, men noen avgrensninger kan vi allerede ta. Vi vet at det må være et andregradsuttrykk.

$$(x^2)' = 2x$$

Vi vet også at vi kan multiplisere uttrykket med en konstant.

$$(k \cdot x^2)' = \frac{4x}{5}$$

Da gjelder det bare å prøve seg litt fram og finne ut at $k = \frac{2}{5}$.

$$\left(\frac{2}{5} \cdot x^2\right)' = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot x = \frac{4}{5}x$$

Vi har da funnet at

$$\int \frac{4}{5}x \, dx = \frac{2}{5} \cdot x^2$$

Den opprinnelige oppgaven hadde grenser som markerte hvor arealet startet og sluttet. Grensene for integralet betyr at vi må sette inn grenseverdiene og finne differansen. Vi skriver det slik

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{4}{5}x \, dx &= \left[\frac{2}{5} \cdot x^2 \right]_0^5 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 5^2 - \frac{2}{5} \cdot 0^2 \\ &= 10 - 0 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Legg merke til hvordan verdiene for grensene settes inn og regnes ut.

Etter denne utregninga vet vi at arealet er 10. Tilnærmingene vi fant var gode.

Integralet kan vi også få hjelp til å finne med et CAS-program. Her er det samme funnet med GeoGebra

Kommandoen i GeoGebra er

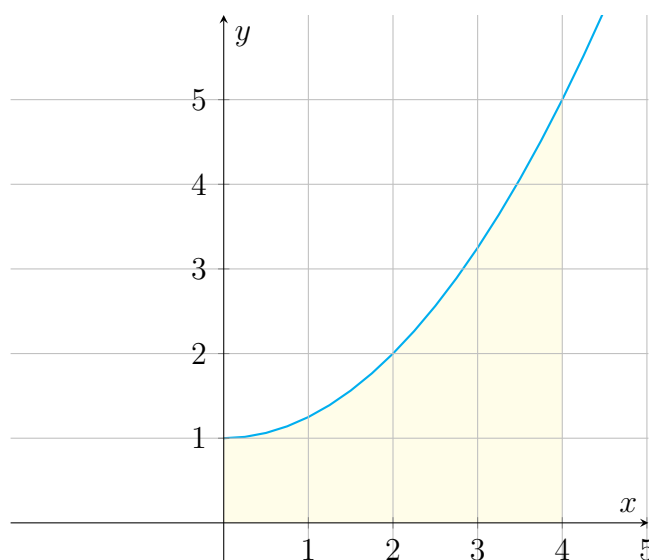
`Integral[<funksjonsnavn>,<variabel>,<start>,<slutt>]`

CAS	
1	$f(x) := 4/5 * x$
☒	$\rightarrow f(x) := \frac{4}{5} x$
2	$\text{Integral}[f, x, 0, 5]$
☐	$\rightarrow 10$

Figur 1.4: Integralet funnet i GeoGebra

1.6 Svaret på den opprinnelige oppgaven

I starten skulle vi finne ut arealet av området avgrensa av grafen til funksjonen, y-aksen og linja $x = 4$ i denne figuren



Uttrykket til funksjonen er $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ og det oppgaven er den samme som å finne integralet

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx$$

Vi kan finne arealet ved hjelp av GeoGebra på denne måten

CAS	
1	$f(x) := 1/4 \cdot x^2 + 1$
☒	$\rightarrow f(x) := \frac{1}{4} x^2 + 1$
2	$\text{Integral}[f, x, 0, 4]$
☐	$\rightarrow \frac{28}{3}$

Figur 1.5: Integralet funnet i GeoGebra

2 En definisjon av et integral

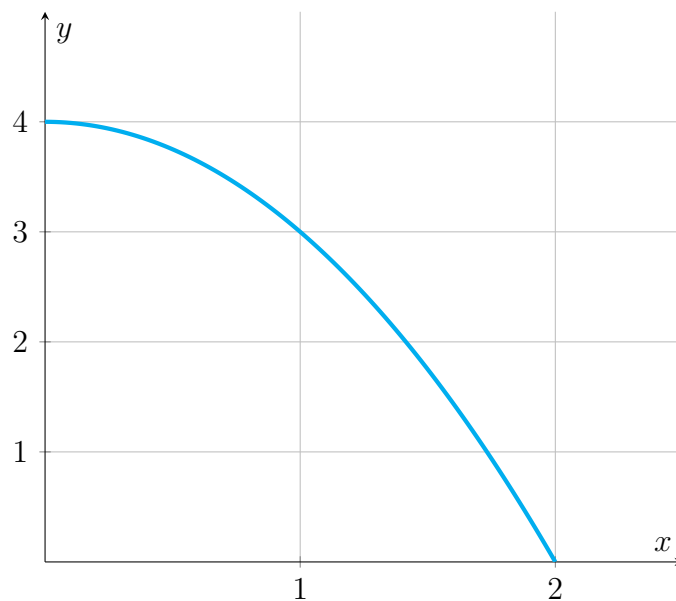
2.1 En tilnærming til arealet under grafen

Nå er vi allerede kjent med oppdelingen av arealet. Vi har allerede blitt kjent med at vi kan finne arealet under grafen ved en oppdeling. Det vi har gjort er å dratt tilbake til tida da Arkimedes levde (287 - 212 f. Kr.). Du husker kanskje at han kom fram til en verdi av π på en måte som ikke er ulik den vi nå skal se på. Denne metoden, som på engelsk kalles «the method of exhaustion», brukte han også andre formål.

Vi skal nå se litt nærmere på teknikken og til slutt definere integralet som en sum.

La oss se på funksjonen $f(x) = -x^2 + 4$

Tegner vi grafen til den mellom 0 og 2 vil den se slik ut:



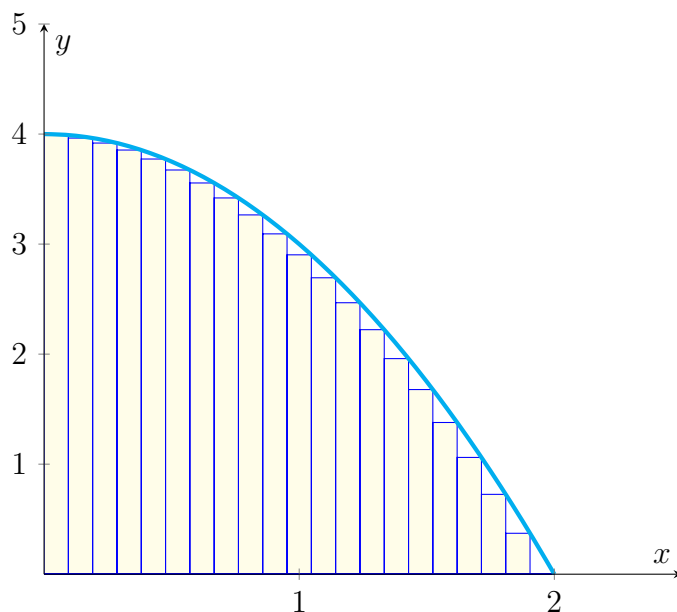
Figur 2.1: Nullpunkt

Se på figuren og prøv å finne arealet ved et overslag.

Oppgave 6

Finne arealet avgrenset av grafen til $f(x) = -x^2 + 4$ og aksene i koordinatsystemet ved å benytte rutenettet.

Det kan være upresist å prøve å måle opp arealet, men tankegangen vi har sett er at desto flere rektangler vi deler opp området i, jo bedre tilnærming får vi.



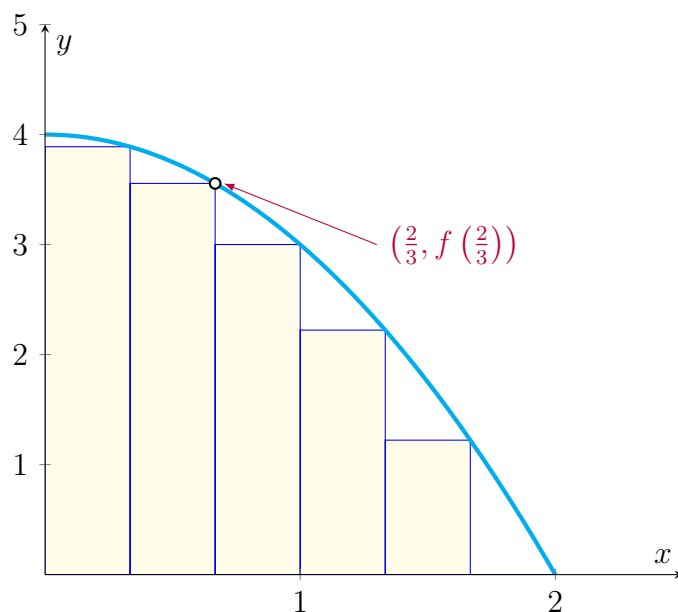
Figur 2.2: Findelt areal

Figuren viser at en slik oppdeling gir en ganske god tilnærming til arealet. Nå skal vi se at det vil kunne fortelle det samme som det bestemte integralet

2.2 En Riemansum

Slike inndelinger av arealet og summen av delarealene har fått navnet Riemansummer etter den tyske matematikeren Rieman¹. La oss se på et eksempel hvor vi deler inn arealet i seks deler. Hver enhet er da delt i tre deler. Se figur 2.3.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866



Figur 2.3: Arealet delt i seks deler

Nå skal vi prøve å finne arealet ved å legge sammen arealet av alle disse rektanglene. Første spørsmål blir da hvordan skal vi regne ut arealene av rektanglene.

I figur 2.3 er det seks enheter opp til to. Den siste har høyde lik null, så den ser vi ikke så tydelig. Hvert rektangel er da $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ bredt. Høyden i hvert rektangel bestemmes av funksjonsverdien, slik at det første rektanget får bredde $\frac{1}{3}$ og høyde $f(\frac{1}{3})$. Neste rektangel har samme bredde, men høyden $\frac{2}{3}$.

Summen av arealet til alle rektanglene kan vi nå skrive som:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{3}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{6}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 f\left(\frac{2k}{6}\right)
 \end{aligned}$$

Summetegnet er kanskje nytt for deg? Det er en effektiv måte å skrive summen på ved å innføre en variabel. Her er det k . Summen får vi ved å gjenta uttrykket etter summetegnet for $k = 1$, $k = 2$ og så videre, helt til $k = 6$. For de med erfaring fra programmering kalles dette ei FOR-sløyfe.

Regner vi ut får vi

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 f\left(\frac{2k}{6}\right) = \frac{125}{27}$$

Da har vi funnet et tilnærma areal for området under grafen!

Heldigvis kan vi få hjelp til slike utregninger med digitale verktøy. Se figur 2.4 for hvordan syntaksen er i GeoGebra og TI-Nspire.

definerer funksjonen

$$f(x) := -x^2 + 4 \rightarrow \text{Ferdig}$$

finner summen

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 f\left(\frac{2 \cdot k}{6}\right) \rightarrow \frac{125}{27}$$

(a) TI-Nspire

CAS	
1	$f(x) := -x^2 + 4$
☒	$\rightarrow f(x) := -x^2 + 4$
2	$1/3 \cdot \text{Sum}[f(2 \cdot k/6), k, 1, 6]$
☐	$\rightarrow \frac{125}{27}$

(b) Geogebra

Figur 2.4: Summer med CAS

Med denne inndelinga i seks deler har vi funnet en tilnærming til arealet som er $\frac{125}{27} \approx 4.63$. Hvordan stemmer det med det du fant ut ved å telle ruter? Det var en tilnærming. Deler vi opp i flere deler vil den bli bedre.

2.3 En finere oppdeling

Hva om vi deler opp i flere rektangler? Det er bare å regne ut summer. Her er noen samlet i tabellen under:

Antall rektangler	Sum	Areal
6	$\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^6 f\left(\frac{2k}{6}\right)$	$\frac{125}{27} = 4.6296$
7	$\frac{2}{7} \cdot \sum_{k=1}^7 f\left(\frac{2k}{7}\right)$	$\frac{232}{49} = 4.7347$
10	$\frac{2}{10} \cdot \sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{2k}{10}\right)$	$\frac{123}{25} = 4.92$
20	$\frac{2}{20} \cdot \sum_{k=1}^{20} f\left(\frac{2k}{20}\right)$	$\frac{513}{100} = 5.13$
50	$\frac{2}{50} \cdot \sum_{k=1}^{50} f\left(\frac{2k}{50}\right)$	$\frac{3283}{625} = 5.2528$
n	$\frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right)$	

Nederst ser du et generelt uttrykk for n rektangler, nemlig

$$\frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

2.3.1 Hva om vi har uendelig mange rektangler?

Jeg nevnte at jo flere, jo bedre. Det beste må da være uendelig mange. Hva skjer hvis vi øker antall rektangler til uendelig mange? Hvordan kan vi finne ut det? Jo, vi kan sette inn større og større verdier for n og se hva som skjer, men det gir bare en antydning. Som ellers når noe «går mot uendelig» er det grenseverdier som gir oss svaret.

Vi skal se at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{16}{3}$$

Igjen ber vi om litt hjelp og ber et CAS-verktøy finne svaret for oss.

Summen av uendelig mange
rektangler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{2 \cdot k}{n}\right) \right) \right) = \frac{16}{3}$$

(a) TI-Nspire

$$\text{Grenseverdi}\left[\frac{2}{n} \cdot \text{Sum}\left[f\left(\frac{2 \cdot k}{n}\right), k, 1, n\right], n, \infty\right] \rightarrow \frac{16}{3}$$

(b) Geogebra

Figur 2.5: Grenseverdiene med CAS

2.4 Arealet ved integrasjon

Arealet kan vi også finne med det bestemte integralet

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx$$

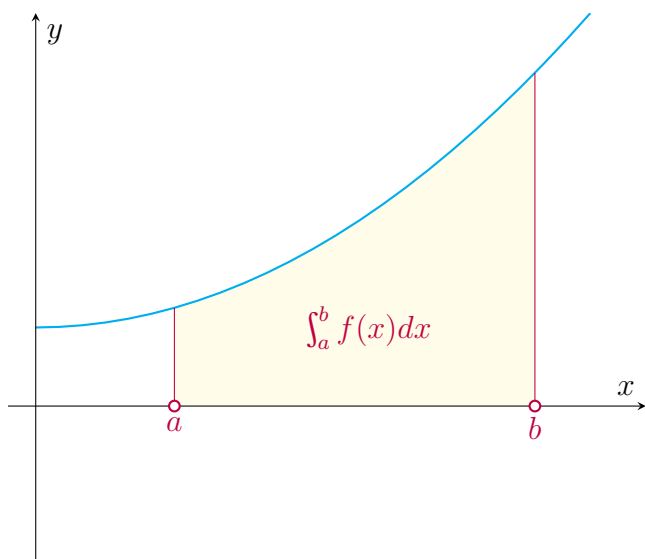
Det regner vi ut slik

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 + 4) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 \\ &= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - 0 \\ &= -\frac{8}{3} + \frac{24}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Funksjonsuttrykket vi finner ved integrasjon kan vi se stemmer. Det er bare å derivere, så kan vi kontrollere det. Seinere skal vi se på regler som gjør denne jobben for oss. Så langt skal vi konsentrere oss om konklusjonen: Integralet gir samme svar som når vi delte i uendelig mange rektangler.

2.5 Det bestemte integralet

Det er grenseverdien for denne summen ved en oppdeling i uendelig mange rektangler vi kaller det bestemte integralet.



Figur 2.6: Et bestemt integral

Vi så et spesielt tilfelle, men vi kan tenke oss at f er en hvilken som helst kontinuerlig funksjon, som er definert i området. Bredden på hvert rektangel er Δx . Da gjelder samme argument som i det spesielle tilfellet og vi kan skrive

Definisjon 1

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \text{der } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ og } x_k = a + k \cdot \Delta x$$

La oss se om det stemmer for vårt tilfelle. I eksemplet er $a = 0$ og $b = 2$. Det gir

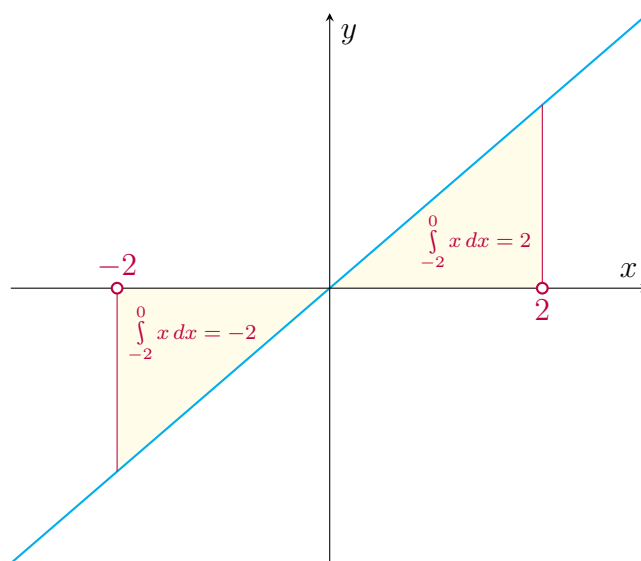
$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$x_k = a + k \cdot \Delta x$ vil vi da kunne skrive som

$$x_k = 0 + k \cdot \frac{2}{n} = \frac{2k}{n}$$

2.5.1 Det bestemte integralet og areal

Ut fra definisjonen kan vi også observere at det bestemte integralet ikke alltid direkte gir arealet under kurven. Blir funksjonsverdien negativ for et rektan-



Figur 2.7: Areal og integral

gel vil dette få negativt fortegn. Vi kan se på et lite eksempel med funksjonen $f(x) = x$. Figur 2.7 viser grafen til funksjonen. Hva er funksjonsuttrykket til funksjonen hvor den deriverte er lik x ? Svaret er integralet og et bestemt integral kan fortelle oss arealet. Vi kan også benytte f. eks. GeoGebra til det samme. Da finner vi

$$\begin{aligned} \text{Integral}[x, -2, 2] &\rightarrow 0 \\ \text{Integral}[x, 0, 2] &\rightarrow 2 \\ \text{Integral}[x, -2, 0] &\rightarrow -2 \end{aligned}$$

Her kan vi observere en viktig sammenheng mellom areal og integral: ligger det avgrensa området under x-aksen vil integralet gi størrelsen av arealet med negativt fortegn.

Dette ser vi stemmer med definisjonen av det bestemte integralet.

2.5.2 Det bestemte integralet og antiderivasjon

Nå har vi allerede funnet integraler som

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx$$

Da fant vi en funksjon ut fra den deriverte. Det bestemte integralet kan også defineres ut fra antiderivasjon.

Definisjon 2

Hvis F og f er kontinuerte funksjoner i intervallet $[a, b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$ har vi at

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vi kaller a og b for integrasjonsgrenser.

3 Ubestemte integral

3.1 En definisjon av ubestemte integral

Den antideriverte av en funksjon f kaller vi F og vi har da at

$$F'(x) = f(x)$$

Da kan vi definere det ubestemte integralet med denne definisjonen

Definisjon 3

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en konstant}$$

Den deriverte funksjonen gir alle stigningstallene til tangentene. Er funksjonen en konstant, vil alle stigningstallene være lik null. Når vi antideriverer vil alle funksjonene på formen $F(x) + C$ derfor være lik $f(x)$.

Se på hva som skjer når vi deriverer disse funksjonene

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 + 3 &\implies f'(x) = 2x \\ g(x) = x^2 + 7 &\implies g'(x) = 2x \end{aligned}$$

Uansett hva konstantleddet er får vi den samme deriverte. Derfor er

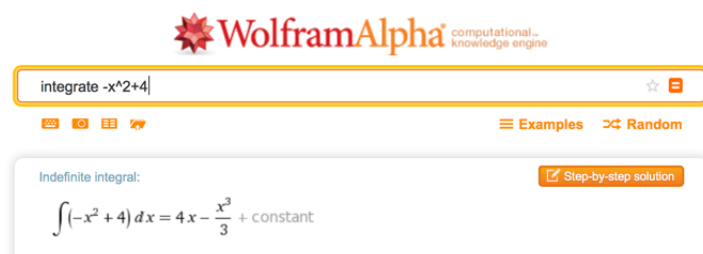
$$\int 2x dx = x^2 + C$$

3.2 Integralregning med digitale verktøy

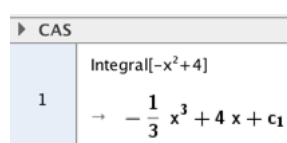
Digitale verktøy kan finne både bestemte og ubestemte integral for oss. Så langt har vi funnet integralet ved å tenke antiderivasjon, som vi gjorde i dette tilfellet

$$\int (-x^2 + 4) dx = -\frac{x^3}{3} + 4x + C$$

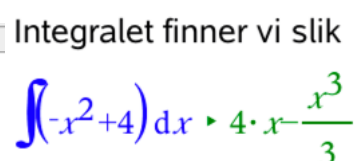
Figur 3.1 viser hvordan vi kan finne integraler med forskjellige CAS-verktøy.



(a) WolframAlpha



(b) Geogebra



(c) TI-Nspire

Figur 3.1: Integraler funnet med CAS

3.2.1 WolframAlpha

WolframAlpha er både en app for smarttelefoner og ei nettside. De har tatt mål av seg å kunne finne svar på det meste og det inkluderer naturligvis å finne integraler. Det er bare å begynne å skrive, så kommer forslag opp. Den korteste inntastinga for å finne dette integralet er:

`int -x^2+4`

3.2.2 GeoGebra

I GeoGebra kan vi finne integraler i CAS-modulen. Kommandoen for ubestemt integral er

`integral[-x^2+4]`

3.2.3 TI-Nspire

TI-Nspire fins for iPad, PC og Mac og inneholder både CAS, regneark, tekstbehandler, statistikk og mye mer. Kommandoene kan skrives med vanlig matematisk notasjon, som figur 3.1c viser.

3.2.4 Praktisk bruk

Dette må prøves. Prøv å benytt verktøyet til å finne en regel for integrasjon ved å gjøre neste oppgave.

Oppgave 7

Benytt et CAS-verktøy og finn disse integralene.

a $\int x \, dx$

b $\int x^2 \, dx$

c $\int x^3 \, dx$

d $\int x^4 \, dx$

e $\int x^5 \, dx$

Kan du finne en regel for integrasjon av x^n ?

Fant du en regel? Nå kan du sjekke om den stemmer ved å gjøre oppgaven under.

Oppgave 8

Benytt et CAS-verktøy og finn disse integralene.

a $\int x^{31} \, dx$

b $\int \frac{1}{x^9} \, dx$

c $\int \sqrt{x} \, dx$

d $\int \frac{1}{x} \, dx$

e $\int 17x^5 \, dx$

3.3 Noen regler for integrasjon

Til nå har vi prøvd oss fram eller benyttet digitale verktøy for å finne integraler. Akkurat som for derivasjon fins det regler her også.

Definisjon 4

Hvis a er en konstant har vi at

$$\int a \, dx = ax + C$$

Definisjon 5

Hvis $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ har vi at

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Definisjon 6

Hvis a er en konstant har vi at

$$\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx$$

Definisjon 7

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Definisjon 8

$$\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

Oppgave 9

Finn integralene ved å benytte reglene. Kontroller svaret med et CAS-verktøy.

a $\int(3x^4 + 5x^2 + x - 9) dx$

b $\int(6x^7 - 9x^3 + 17) dx$

3.4 Noen ord og uttrykk

The diagram shows the integral equation $\int(x + 4) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$. A green box highlights the integrand $(x + 4)$, with an arrow pointing to it from the label "integrand" below. An arrow points from the label "x er variabelen" to the x inside the integrand. Another arrow points from the label "integrasjonskonstant" to the constant C on the right side of the equation.

$$\int(x + 4) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

integrand

x er variabelen

integrasjonskonstant

Figur 3.2: Et integral

4 Analysens fundamentalsetning

4.1 Analysens fundamentalsetning

Vi holder oss til figur 4.1 hvor vi har markert et areal under grafen avgrenset av to vertikale linjer, a og x .

Vi legger til en liten positiv verdi Δx til x . Hele arealet avgrenset av grafen, linja $x + \Delta x$ og a er nå $A(x + \Delta x)$. Husk at Δx er en liten verdi. Da har vi at

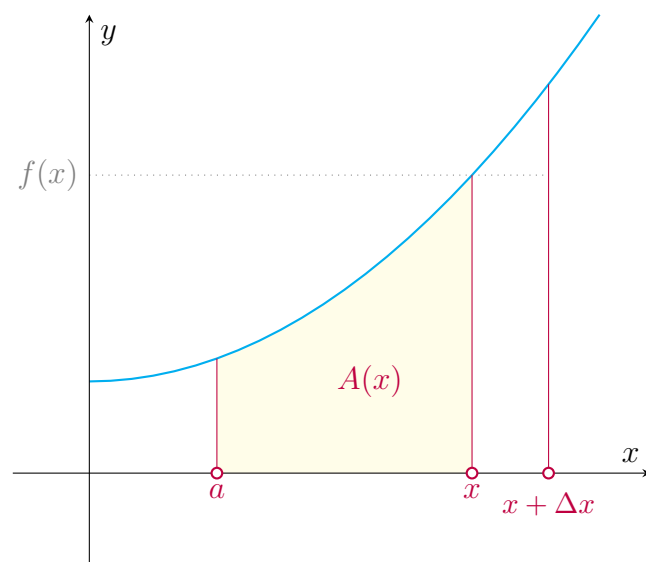
$$\begin{aligned} A(x + \Delta x) - A(x) &\approx f(x) \cdot \Delta x \\ \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} &\approx f(x) \end{aligned}$$

Så lar vi Δx gå mot null

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Er det noe kjent med venstre side i uttrykket? Joda, det er definisjonen av den deriverte og vi har vist at:

$$A'(x) = f(x)$$



Figur 4.1: Et integral

5 Noen praktiske eksempler

5.1 Omsetting i en bedrift

I dette eksemplet skal vi se på sammenhengen mellom integralet og en sum. Vi gjør det ved å se på denne oppgaven

Oppgave 10

En bedrift omsetter for 200 millioner kr i 2015 og regner med å øke omsetningen med 15 millioner kr per år.

Finn den samla omsetningen i perioden fra og med 2015 til og med 2020 ved

- å summere år for år
- å benytte integralregning

Ved summering Her kan vi gjøre det på den enkle måten ved å summere ledd for ledd.

2015	2016	2017	2018	2019	2020	sum
200	215	230	245	260	275	1425

Et alternativ hvis det hadde vært mange ledd er å se det som ei aritmetisk rekke hvor det første leddet er 200 og det øker med 15 for hvert ledd. Da har vi at $a_1 = 200$ og $d = 15$

Vi kan finne summen av alle leddene ved å benytte formelen for summen av ei aritmetisk rekke

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Det siste leddet kan vi finne ved at

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \implies a_6 = 200 + 5 \cdot 15 = 275$$

Nå kan vi benytte formelen og få

$$S_6 = \frac{6}{2} (200 + 275) = 1425$$

Naturligvis kan vi også skrive det med en summeformel og benytte et verktøy for å finne svaret

$$\sum_{i=1}^6 (200 + (i - 1) \cdot 15) = 1425$$

Benytter vi GeoGebra kan vi skrive `Sum[200+(i-1)*15, i, 1, 6]` og få samme svar.

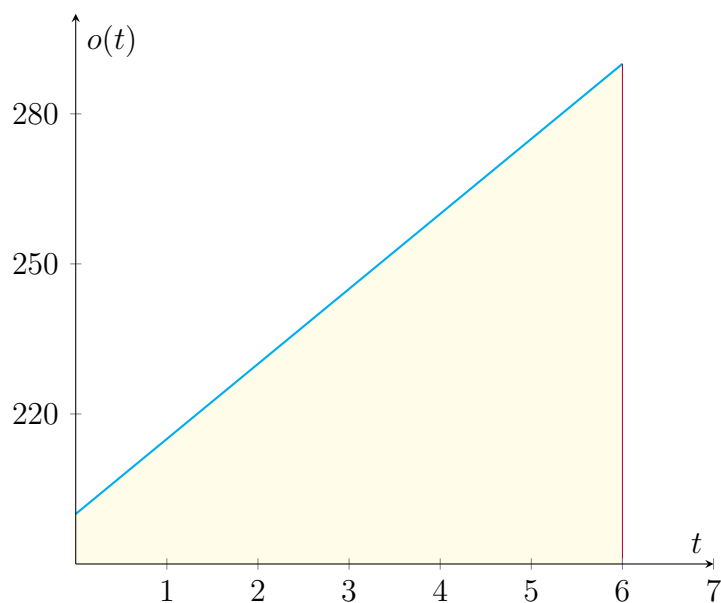
Svar: Summert år for år vil omsetningen bli 1474 millioner kroner

Ved integralregning Nå må vi ha en funksjon som gir sammenhengen mellom år og omsetting. Setter vi år 2015 lik $t = 0$, kaller funksjonen for o , har vi

$$o(t) = 200 + 15 \cdot t$$

Her er $D_o = [0, 6]$

Fra definisjonen av integralet som en sum av uendelig fin inndeling i rektangler vet vi at integralet gir oss arealet under grafen. I figuren er det markert med gul farge.



Vi regner ut det bestemte integralet

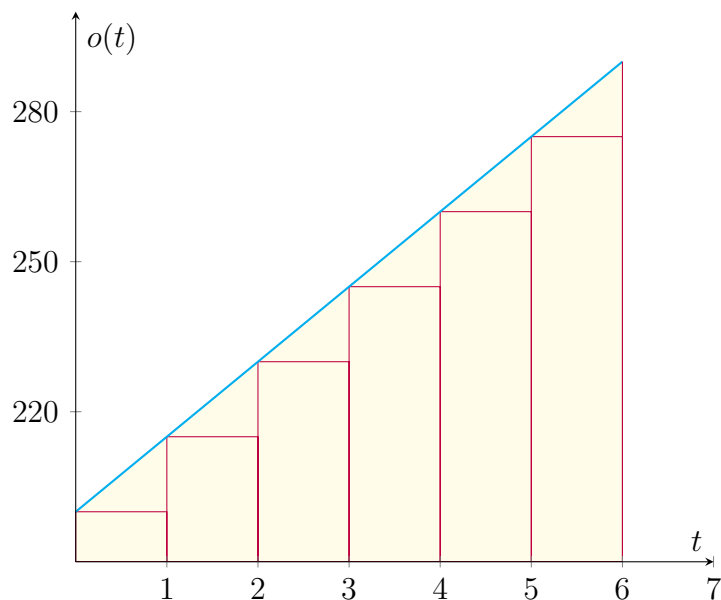
$$\int_0^6 (200 + 15 \cdot t) dt = 1470$$

Svar: Integralregning gir en samla omsetting på 1470 millioner kroner

Hva skiller de to beregningene?

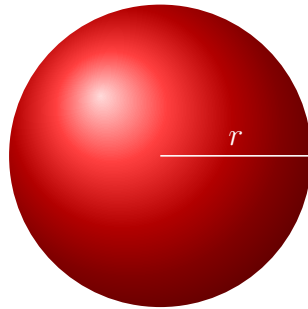
Oppgaven illustrerer på en fin måte forskjellene mellom kontinuerlig og stegvis vekst. Noe av det samme finner vi ved renteregning eller befolkningsøkning. Bankene bruker (som regel? her er jeg ikke sikker...) en stegvis vekst for å beregne rente. Får vi 5% rente pro anno betyr det at en regner 5% av beløpet som har stått i det året. Tas pengene ut etter kortere tid beregnes det etter et forhold som sier noe om hvor lang tid pengene har stått i brøkdeler av året. Slik regner vi også når det gjelder f. eks. befolkningsøkning.

Integralregning gir oss et verktøy til å benytte en vekstmodell hvor vi betrakter veksten som kontinuerlig, dvs. veksten skjer hele tida. Vi har introdusert integralregning ved å se på summen av rektangler under grafen.



Integralregning er verktøyet som finner arealet under grafen. Nå er det spørsmål om det var det arealet eller arealet av alle rektanglene vi skulle finne. Bare virkeligheten kan gi svaret. Kanskje noen i bedriften vet det?

5.2 Volumet av ei kule

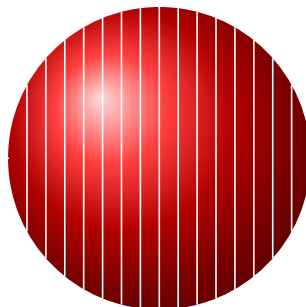


Oppgave 11

Vis at volumet V av ei kule med radius, r , er gitt ved

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Vi starter med å tenke at vi deler kula inn i mange små skiver slik det er gjort i figur 5.1. Etter å ha delt ser vi på ei av skivene.



Figur 5.1: Kula delt i små skiver

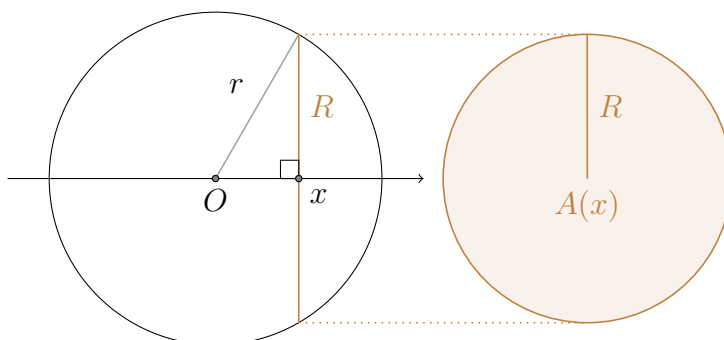
Vi plasserer kula slik at sentrum er i origo i et koordinatsystem vil figur 5.2 vise ei av skivene fra to sider. Her er R radius i skiva med sentrum i punktet x . Den har arealet $A(x)$.

Benytter vi pytagorassetningen kan vi skrive

$$\begin{aligned}x^2 + R^2 &= r^2 \\ R^2 &= r^2 - x^2\end{aligned}$$

Arealet av skiva kan da uttrykkes ved

$$A(x) = \pi R^2 = \pi(r^2 - x^2)$$



Figur 5.2: Et tverrsnitt

Volumet av kula kan vi da finne ved å integrere og regne ut

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \pi \left(r^2 r - \frac{1}{3} r^3 - \left(r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right) \right) \\ &= \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Da er det vist at volumet av ei kule kan uttrykkes som

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

□

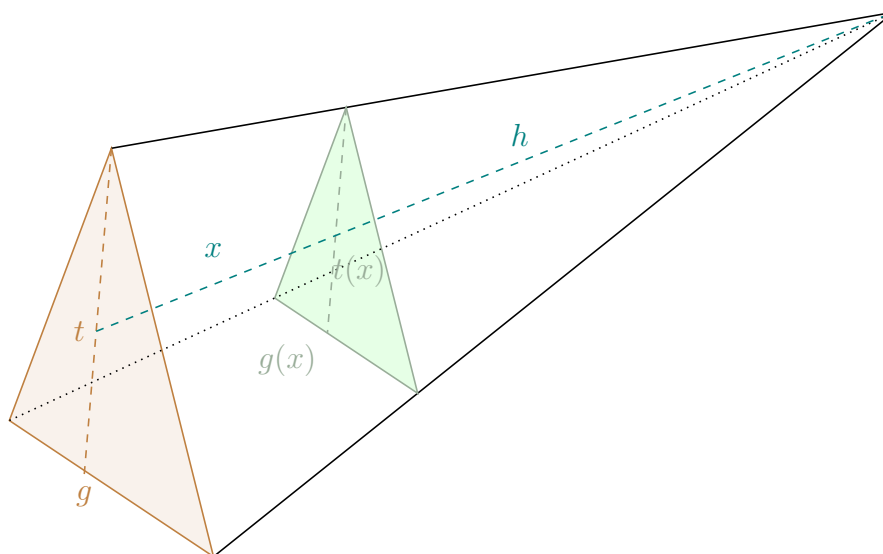
5.3 Volumet av en trekanta pyramide

Oppgave 12

Vis at volumet V av en rett trekanta pyramide med grunnflate G og høyde H er gitt ved

$$V = \frac{1}{3}Gh$$

Da er det alltid lurt å starte med en god figur. Her er en.



Oppgaven vår vil være å finne et uttrykk for grunnflata i et hvilket som helst snitt gjennom pyramiden. I figuren tenker vi oss lagt i et koordinatsystem med origo i punktet hvor høyden skjærer grunnflata. Da kan vi finne disse forholdene

$$\frac{t(x)}{h-x} = \frac{t}{h} \quad \frac{g(x)}{h-x} = \frac{g}{h}$$

Det gir oss

$$t(x) = \frac{t}{h} \cdot (h-x)$$
$$g(x) = \frac{g}{h} \cdot (h-x)$$

Arealet av snittflata kan vi skrive som

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}g(x)t(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{h} \cdot (h-x) \cdot \frac{t}{h} \cdot (h-x) \\ &= \frac{1}{2}gt \cdot \frac{1}{h^2} (h-x)^2 \\ &= G \cdot \frac{1}{h^2} (h-x)^2 \end{aligned}$$

Da kan vi finne volumet av pyramiden ved integrasjon

$$V = \int_0^h G \cdot \frac{1}{h^2} (h-x)^2 \, dx = \frac{1}{3}hG$$

□

Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst. - *Viggo Brun* (1885 -1978)

A.1 Hvor kommer integraltegnet fra?



Figur A.1: Tysk fri-merke med Leibniz

I et handskrevet manuskript datert 29. oktober 1675 introduserer Leibniz symbolet $\int$. Opprinnelsen er bygd på den lange formen av bokstaven s. På den tida var det en skrivemåte som ble mye benyttet, blant annet av Leibniz.

Først elleve år etter brukt han dette symbolet på trykk. Det skjedde i en artikkel i *Acta eruditorum* i 1686 og ble brukt åtte ganger. På trykk så integraltegnet litt annerledes ut enn hva vi er vant med i dag. Det var mer amputert, som en *f*. Vi kjenner tegnet igjen som den lille s i det gotiske alfabetet.

Først i *Leibnizens Mathematische Schriften* (1885) er den formen vi kjenner tatt i bruk på trykk.

Jacob Bernoulli brukte første gang uttrykket integral. Johan Bernoulli foreslo bokstaven I som symbol for integrasjon i et brev til Leibniz, men til slutt ga han etter for Leibniz sitt forslag¹.

¹Opplysningene er hentet fra Cajori (1993), ei bok som kan anbefales for den som vil vite mer om matematisk notasjon.

Bibliografi

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Courier Dover Publications.