

Geometri

Per G. Østerlie

3. desember 2024

1	Innledning	3
1.1	Geometri – Hva er det?	3
1.2	Viktige begrep	3
2	Euklid	6
2.1	Euklid fra Aleksandria	6
2.2	Oppbygging	6
2.3	Argumentasjon	7
2.4	Noen aktuelle proposisjoner fra Euklid	8
3	Kongruens	11
3.1	Kongruens	11
3.2	Kongruente trekanter	11
3.3	Likebeinte trekanter	14
3.4	Kongruensavbildninger – isometri	17
4	Formlikhet	22
4.1	Formlike trekanter	22
4.2	Sidene i formlike trekanter	22
4.3	Noen typiske oppgaver	23
4.4	Transversalsetningen	25
5	Pytagoras	30
5.1	Læresetningen til Pytagoras	30
5.2	Bevis av setningen	31
5.3	Bevis for den omvendte setningen	37
6	Periferivinkelsetningen	40
6.1	Periferivinkelsetningen	40
6.2	Tales setning	44
6.3	Noen oppgaver	44
7	Analytisk geometri	47
7.1	Avstanden mellom to punkter	47
7.2	Midtpunktet på ei linje	49
8	Kjeglesnittene	55
8.1	Sirkelen	55
8.2	Parabelen	57
8.3	Ellipsen	60
8.4	Hyperbelen	63

Her er litt om geometri som vi har tatt opp i høst. Husk at alt ikke er med her! Dukker det opp noe som er feil eller uklart er det fint om jeg får beskjed. Send meg en e-post: per.g.osterlie@ntnu.no, så kan jeg rette det opp.

Teksten er skrevet med $\text{\LaTeX}$.



Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0 Internasjonal Offentlige Lisens

1 Innledning

1.1 Geometri – Hva er det?

Ordet geometri kommer fra gresk og betyr rett oversatt «jordmåling». Geometri er en av våre eldste vitenskaper og handler om egenskaper, størrelser og sammenhenger til figurer og legemer.

Les mer her [Wikipedia: Geometri](#) og [SNL: Geometri](#)

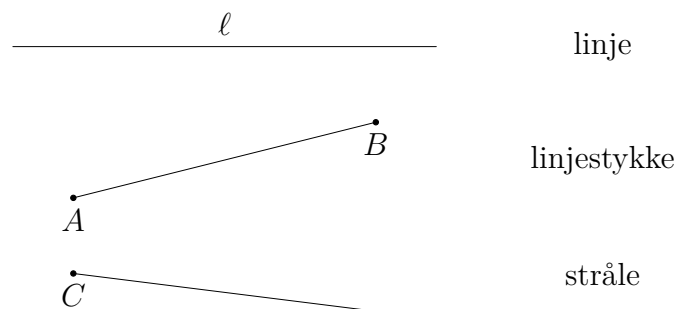
1.2 Viktige begrep

Punkter og linjer

Et *punkt* i geometrien er en ide om en fast posisjon uten utstrekning. Vi markerer et punkt med en prikk eller et kryss og benytter store bokstaver for å sette navn på punktene.

Ei rett *linje* illustreres som en strek og har utstrekning i en dimensjon. Linja fortsetter uendelig i begge retninger. Vi kan tenke på ei linje som uendelig mange punkter.

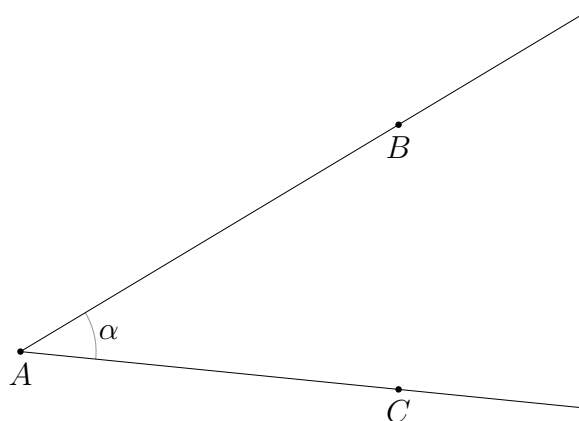
Et *linjestykke* er den delen av ei linje som ligger mellom to endepunkter. Figuren under viser linjestykket AB .



En *stråle* er en del av ei linje som er avgrensa av ett endepunkt. En stråle er også uendelig lang.

Vinkler

Vinkler er viktige i geometrien. En vinkel er dannet av to vinkelbein



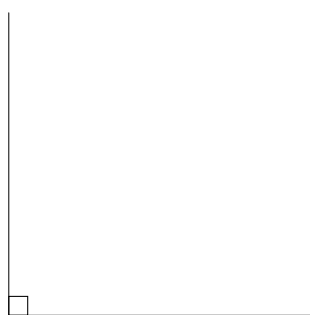
Vinkelen over dannes av vinkelbeina AB og AC . Vi kan enten gi vinkelen et navn ved en bokstav eller benytte punktene. Symbolet $\angle$ benyttes som ordet «vinkelen» slik at $\angle CAB$

betyr «vinkelen dannet av vinkelbeina gjennom punktene C, A og B». Det er vanlig å skrive navnene på punktene i rekkefølge mot klokka, men ikke alle følger den regelen. Her har også $\angle CAB$ fått navnet α som er den greske bokstaven alfa. Ofte benyttes små greske bokstaver eller bokstavene fra «u» i alfabetet.

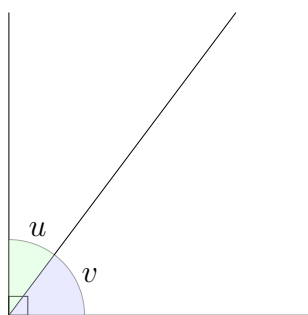
For å beskrive egenskapene til vinkler benytter vi en del begrep. Her er noen definisjoner som dukker opp.

Definisjon 1 Navn på vinkler

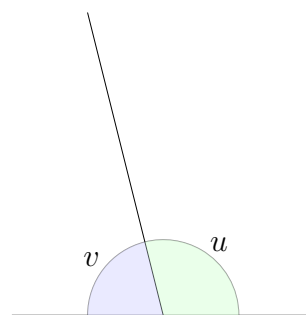
- En *rett* vinkel er 90°
- En *like* vinkel er 180°
- En *spiss* vinkel er mellom 0° og 90°
- En *stump* vinkel er mellom 90° og 180°



Rett vinkel



Komplementsvinkler



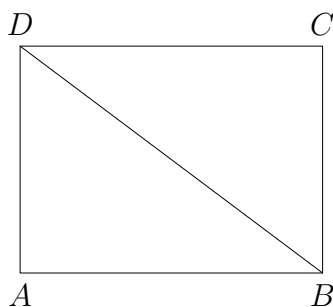
Nabovinkler

Definisjon 2 To vinkler

- Komplementvinkler* er to vinkler som til sammen er 90°
- Supplementsvinkler* er to vinkler som til sammen er 180°
- Nabovinkler* er supplementsvinkler med felles vinkelbein

Plangeometri og symbolbruk

Et *plan* har en utstrekning i to dimensjoner, akkurat som et ark vi tegner på. Vi kan kalle det *plangeometri* når vi betrakter punkter, linjer og figurer i ett og samme plan.



For figurene vi tegner i planet benytter vi symbolet $\triangle$ for ordet «trekant» og $\square$ for «firkant». Med utgangspunkt i figuren over kan vi skrive $\triangle ABD$ når vi mener «trekanten dannet av punktene A, B og D». For «firkanten dannet av A, B, C og D» kan vi skrive $\square ABCD$.

Symboler

- $\angle A$ – vinkel A
- $\triangle ABC$ – trekant ABC
- $\square ABCD$ – firkant ABCD
- $AB \perp CD$ – AB er vinkelrett på CD
- $AB \parallel CD$ – AB er parallell med CD
- $|AB|$ – lengden av AB

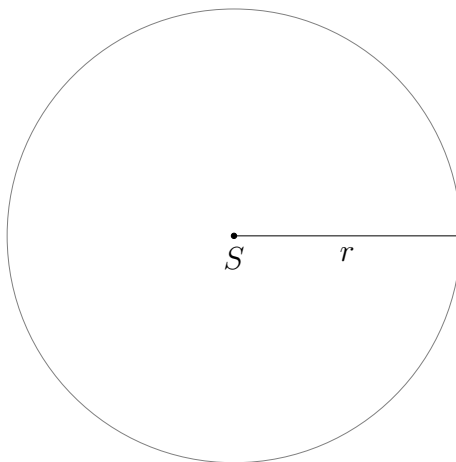
Geometrisk sted

Uttrykket *geometrisk sted* dukker ofte opp i geometrien

Definisjon 3 Geometrisk sted

En samling punkter hvor alle har de samme geometriske egenskapene.

Et typisk geometrisk sted vil være sirkelen.



Alle punktene som utgjør sirkelen ligger like langt fra punktet som vi kaller sentrum. Med uendelig mange punkt får vi det vi kaller en sirkel. Alle punktene har den samme geometriske egenskapen: de ligger i samme avstand fra ett punkt.

Eksempler på andre geometriske steder

- parallelle linjer til ei gitt linje
- midtnormalen til et linjestykke
- halveringslinja til en vinkel
- parabelen

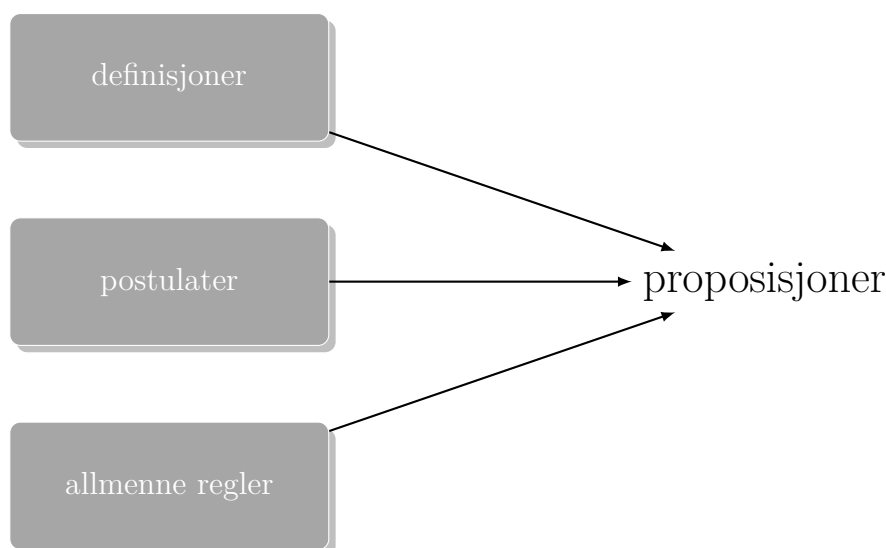
2.1 Euklid fra Aleksandria

Euklid regnes som en av grunnleggerne av geometrien. Det som gjør han fortsatt aktuell for oss i dag er måten han bygget opp argumentasjonen sin.

Euklid ble født omtrent 300 fvt., men vi vet lite om ham. Se [Wikipedia: Euklid](#) for mer.

2.2 Oppbygging

Elementene kalles boka, eller bøkene, som Euklid skrev. Den er bygd opp ved at han starter med noen definisjoner, postulater og allmenne regler (eng. Common notions). Ut fra disse argumenterer han for gyldigheten av proposisjoner (ordet kommer fra det latinske *propositio*, som betyr forslag).



Definisjonene til Euklid kan virke litt merkelig på oss i dag. Her er noen eksempler:

Definisjon 1 Et punkt er det som ikke har noen del.

Definisjon 2 Og ei linje er en lengde uten bredde.

Definisjon 3 Ei rett-linje ligger jevnt med punkter på seg selv.

Definisjonene kan være vanskelige for oss, men han forsøker å klargjøre alle begrepene i boka før han går i gang. De definerte begrepene benytter han for å sette fram fem **postulater**:

Postulat 1. En rett-linje kan trekkes fra et punkt til et annet.

Postulat 2. En endelig rett-linje kan forlenges til en vilkårlig lang rett- linje.

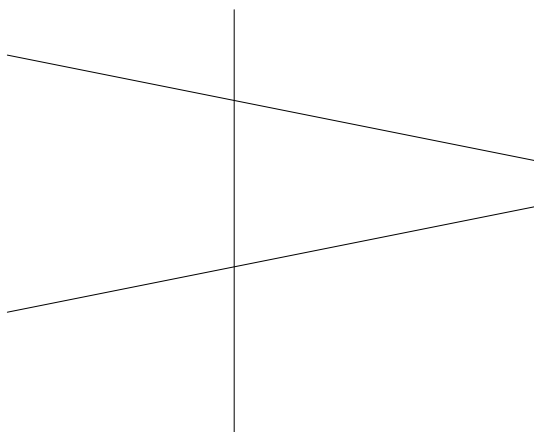
Postulat 3. Rundt ethvert punkt kan man konstruere en sirkel med vilkårlig stor radius.

Postulat 4. Alle rette vinkler er like store.

Postulat 5. Når en rett-linje skjærer to andre rett-linjer slik at summen av de to indre vinklene på samme side er mindre enn to rette vinkler, vil de to rett-linjene møtes på den siden av den første rett-linjen hvor summen av de to indre vinklene var mindre enn to rette vinkler, når rett-linjene forlenges mot det uendelige.

Oversettelse henta fra Preben Lie, UiO

Dette er de fem postulatene til Euklid hvor det siste kalle parallellpostulatet. Parallellpostulatet forteller at to parallelle linjer ikke skjærer hverandre. Det er noe som kan diskuteres og godtas ikke dette postulatet ender vi opp i det som kalles ikke-euklidsk geometri. I vår sammenheng godtar vi det femte postulatet og holder oss til euklidsk geometri.



Euklid benytter seg også av det han kaller *allmenne regler* eller *common notions*, som det heter i engelske oversettelser av Elementene.

CN 1. Ting som er like samme ting er også like hverandre.

CN 2. Og hvis like ting blir lagt til like ting, så er også totalene like.

CN 3. Og hvis like ting blir trukket fra like ting, vil også restene være like.

CN 4. Og ting som sammenfaller er like hverandre.

CN 5. Og hele er større enn delene.

2.3 Argumentasjon

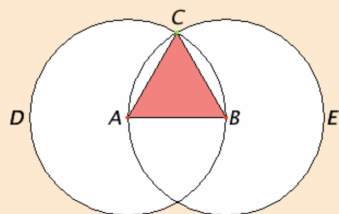
Vi kan se på hvordan Euklid benyttes alt dette for å argumentere for den første proposisjonen sin. Euklids Elementer er det mulig å kjøpe i bokhandelen, men det er også noen versjoner på tilgjengelig på nettet. Her er lenka til en anerkjent utgave [Elementene: Clark University](#).

Et utdrag derfra viser hvordan Euklid kommer fram til sin første proposisjon om hvordan vi kan konstruere en likesida trekant.

Proposition 1

To construct an equilateral triangle on a given finite straight line.

Let AB be the given finite straight line.



It is required to construct an equilateral triangle on the straight line AB .

Describe the circle BCD with center A and radius AB . Again describe the circle ACE with center B and radius BA . Join the straight lines CA and CB from the point C at which the circles cut one another to the points A and B . [I.Post.3](#) [I.Post.1](#)

Now, since the point A is the center of the circle CDB , therefore AC equals AB . Again, since the point B is the center of the circle CAE , therefore BC equals BA . [I.Def.15](#)

But AC was proved equal to AB , therefore each of the straight lines AC and BC equals AB .

And things which equal the same thing also equal one another, therefore AC also equals BC . [C.N.1](#)

Therefore the three straight lines AC , AB , and BC equal one another.

Therefore the triangle ABC is equilateral, and it has been constructed on the given finite straight line AB . [I.Def.20](#)

Q.E.F.

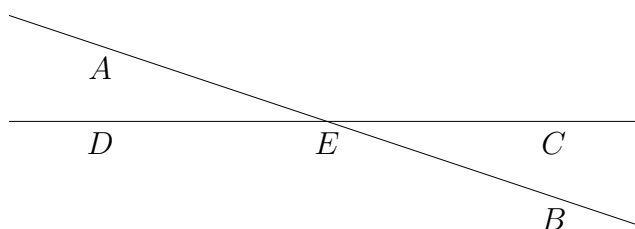
Euklid bygger opp en argumentasjon basert på det han har slått fast tidligere og viser, trinn for trinn, hvordan den likesida trekanten kan konstrueres. En slik argumentasjon kan vi ikke kreve av elever i grunnskolen, men strukturen bør være basert på å logisk bygge opp en argumentasjon som holder.

2.4 Noen aktuelle proposisjoner fra Euklid

Mye av det vi møter i skolematematikken, og særlig i geometri, har sin opprinnelse i Elementene. Vi kan se på noen av dem

Proposisjon 15

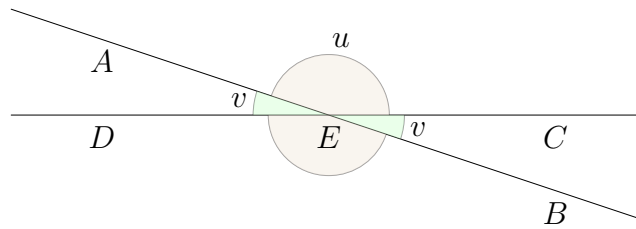
I den engelske utgaven heter det: «If two lines cut one another, they make the vertical angles equal to one another».



Tar vi utgangspunkt i figuren forteller proposisjonen forteller at $\angle CEA = \angle DEB$ og $\angle BEC = \angle AED$.

Bevis 1

Vi kan først vise at $\angle CEA = \angle BED$.



La de rette linjene AB og CD skjære hverandre i punktet E .

Den rette linja AE danner supplementsvinklene $\angle CEA$ og $\angle AED$ med den rette linja CD . Det betyr at $u + v = 180^\circ$.

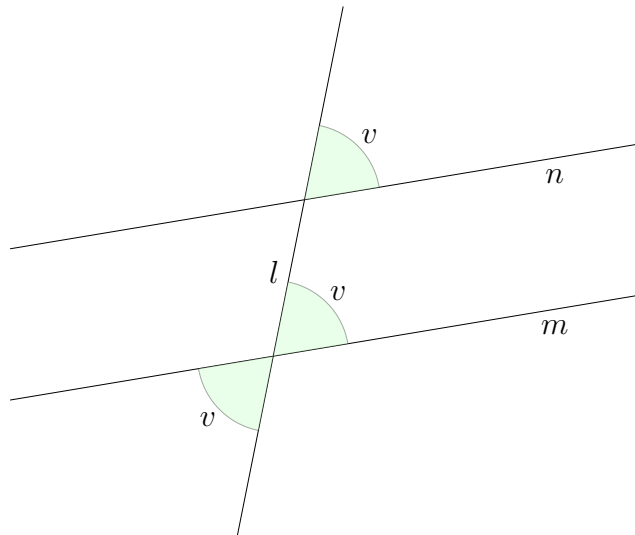
Den rette linja DE danner supplementsvinklene $\angle AED$ og $\angle BED$ med den rette linja AB . Det betyr at $\angle BED + v = 180^\circ$.

Da har vi at $\angle BED = \angle CEA$.

Euklid formulerer det som at både summen av $\angle CEA$ og $\angle AED$ og summen av $\angle AED$ og $\angle BED$ er to rette vinkler (altså supplementsvinkler). Trekker vi fra $\angle AED$ fra begge summene får vi at $\angle BED = \angle CEA$.

Vi kan gjennomføre samme argumentasjon for å vise at $\angle AED = \angle CEB$.

□



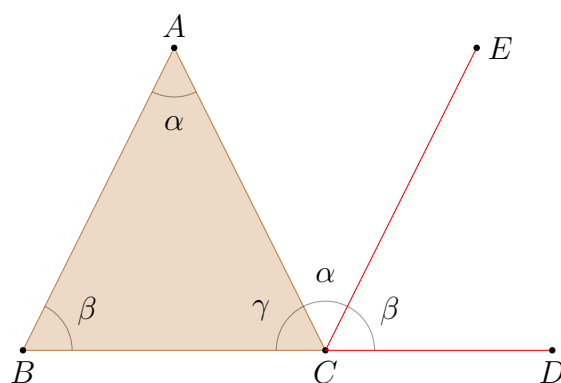
Proposisjon 32

In any triangle, if one of the sides is produced, then the exterior angle equals the sum of the two interior and opposite angles, and the sum of the three interior angles of the triangle equals two right angles.

Vi formulerer det som: Vinkelsummen i en trekant tilsvarer to rette vinkler, altså 180°

Dette beviser Euklid i boka si. Se [Elementene: Proposition 32](#).

Han starter med å tegne denne figuren:



Så bygger han opp beviset gjennom å vise til de allmenne reglene (CN), postulater og tidligere beviste proposisjoner. Her er en direkte oversettelse

Bevis 2

La ABC være en trekant, og la en av sidene, BC , utvides til D .

Jeg sier da at den ytre vinkelen ACD er lik summen av de to indre, og motsatte vinklene, CAB og ABC , og at summen av de tre indre vinklene i trekant ABC , BCA og CAB , er lik to rette vinkler.

Trekk ei linje CE parallell med den rette linja AB gjennom punktet C (P. 31).

Da siden AB er parallell med CE og AC skjærer begge to, vil de to vinklene BAC og ACE være like store (P. 29).

Igjen, da siden AB er parallell med CE , og den rette linja BD skjærer begge, vil vinkel ECD være lik vinkel ABC (P. 29).

Men, det er også vist at vinkel ACE er lik vinkel BAC . Derfor vil hele vinkel ACD være lik summen av vinklene BAC og ABC .

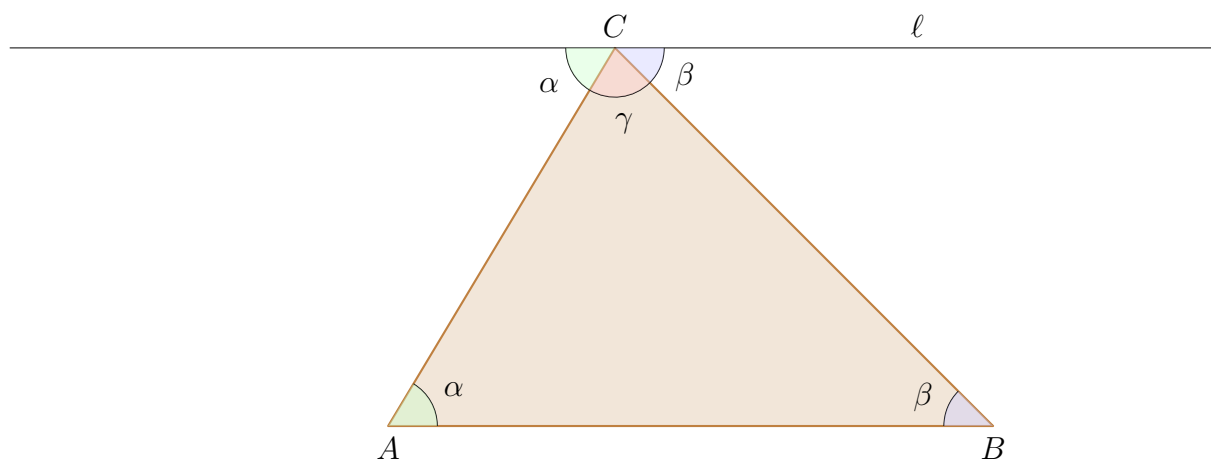
Legg vinkel ABC til begge. Da vil summen av vinklene ACD og ACB være lik summen av de tre vinklene ABC , BCA og CAB (CN. 2)

Men, summen av vinklene ACD og ACB er lik to rette vinkler. Derfor er summen av vinklene ABC , BCA og CAB også lik to rette vinkler (P. 13).

Derfor vil summen av vinklene i enhver trekant være lik summen av to rette vinkler (CN. 1)

□

Vinkelsummen i en trekant kan vises på flere måter. Denne figuren kan også være et utgangspunkt. Her er linja ℓ ei linje som er parallell med AB gjennom C .



Da kan vi ta i bruk proposisjon 15 og vise at det må bli 180° .

3 Kongruens

3.1 Kongruens

Kongruens, og at figurer er kongruente, er noe et ord vi møter i geometrien. Ordet stammer fra det latinske *congruentia* som betyr «samsvar» eller «støter sammen». En mye brukt definisjon er denne:

Definisjon 4 Kongruens

To figurer er kongruente dersom de har samme form og størrelse

Det betyr at figurene som kan legges oppå hverandre, og dekke hverandre den nøyaktig, er kongruente. Da vil alle vinkler og lengder være like.

Kongruens er et sentralt tema i geometrien og et sentralt mål i læreplanen hvor vi finner dette kompetansemålet i LK20.

Kompetansemål etter 9. trinn

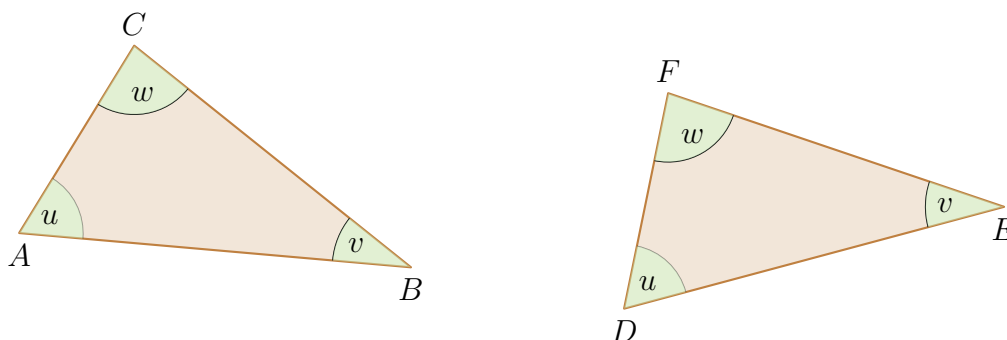
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- utforske eigenskapane ved ulike polygon og forklare omgrepa formlikskap og kongruens

Som vi ser er det et mål at elevene skal kunne forklare begrepene kongruens og formlikhet. I læreplanen er det nevnt polygon (mangekanter). Vi tar trekanten som utgangspunkt.

3.2 Kongruente trekanter

Vi kan tegne to trekanter med like store vinkler og like lange sider.



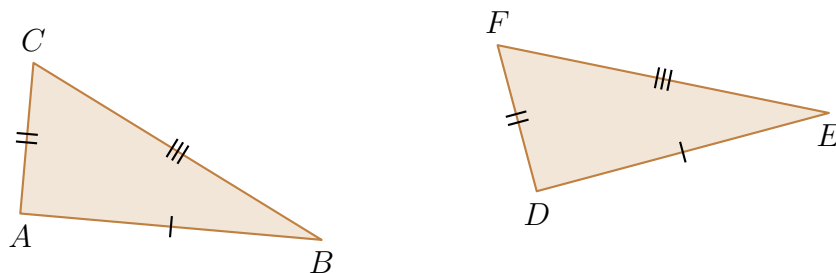
I de to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ finner vi de samme vinklene $\angle u$, $\angle v$ og $\angle w$. I tillegg er sidene parvis like lange, dvs. $|AC| = |DF|$, $|AB| = |DE|$ og $|BC| = |EF|$. Klipper vi ut trekantene kan vi legge dem oppå hverandre og de vil nøyaktig dekke hverandre. Trekantene er kongruente. Det fins et eget symbol for «kongruent» og vi kan skrive det slik:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

For å avgjøre om to trekanter er kongruente har vi noen hjelpemidler i form av *kongruenssetninger*. Oppfylles kravene i disse teoremene vil trekantene være kongruente. Legg merke til at om alle kravene oppfylles så er både formen på trekanten og størrelsen bestemt.

Teorem 1 side-side-side-postulatet

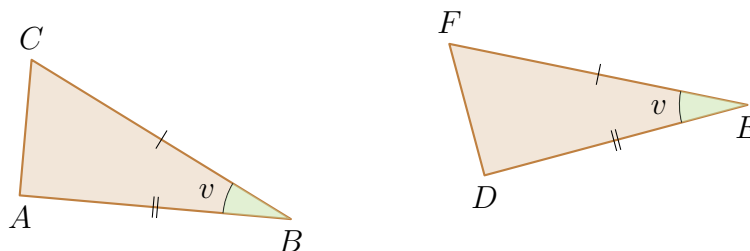
To trekanter er kongruente hvis de har parvis like lange sider



Greier vi å vise at to trekanter har de samme lengdene på sidene kan vi med *side-side-side-postulatet* slå fast at trekantene er kongruente.

Teorem 2 side-vinkel-side-postulatet

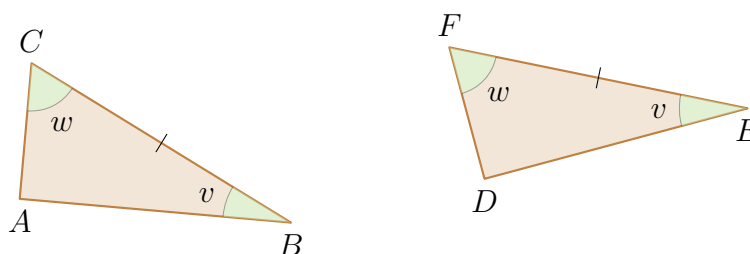
To trekanter er kongruente hvis de har to parvis like lange sider med samme vinkel mellom de to sidene.



Ofte kan det være lurt å tenke seg at trekantene skal konstrueres med de kravene som står. Starter vi med ei gitt side, setter av den gitte vinkelen og markerer lengden på det andre vinkelbeinet, så er både form og størrelse på trekantene bestemt.

Teorem 3 vinkel-side-vinkel-postulatet

To trekanter er kongruente hvis de har to vinkler som er like store og den mellomliggende siden mellom toppunktene er like lange.



Med to vinkler hvor begge har ett felles vinkelbein bestemmes trekanten og stemmer det for to trekanter må de være kongruente.

Legg også merke til at hvis vi vet at to vinkler i en trekanter er parvis like store, så vil den tredje vinkelen være like store i trekantene. Når vi vet det har vi også *vinkel-vinkel-side-postulatet*.

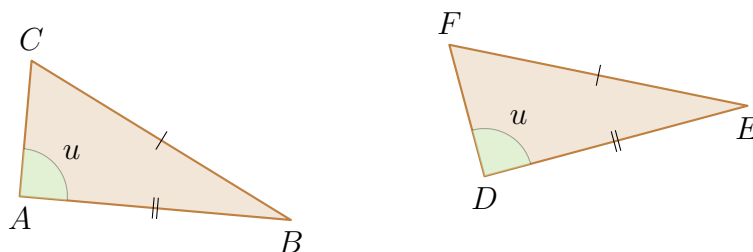
Teorem 4 vinkel-vinkel-side-postulatet

To trekanter er kongruente hvis de har to vinkler som er like store og en side som er like lange.

Egentlig blir det bare en presisering av vinkel-side-vinkel-postulatet.

Teorem 5 side-side-vinkel-postulatet

To trekanter er kongruente hvis to sider er like lange og den motstående vinkelen til den lengste siden er like stor i begge trekanter.



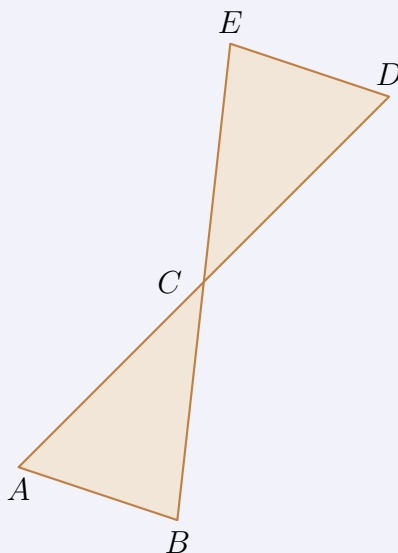
Den setningen kan det være vanskeligere å se for seg, men igjen kan det være greit å tenke på hvordan vi kan konstruere en trekant med de gitte kravene.

En oppgave som et eksempel

Kongruenssetningene benyttes til å vise kongruens. En typisk oppgave kan være omtrent som den under.

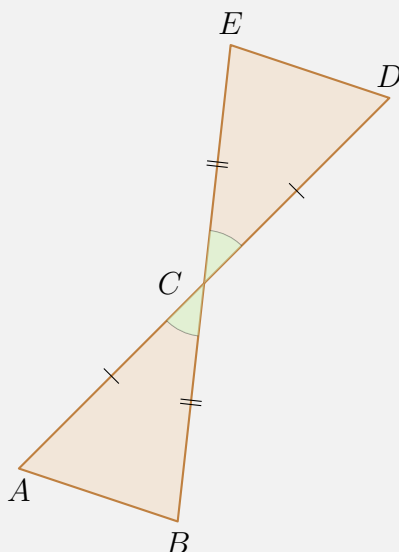
Oppgave 1

I figuren under er $AC = CD$ og $BC = CE$. Argumenter for at $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.



Løsningsforslag

Oppgaven gir at $|AC| = |CD|$ og $|BC| = |CE|$.



De to linjene AD og BE skjærer hverandre i punktet C og danner vinklene $\angle BCA$ og $\angle ECD$ som blir toppvinkler.

Side-vinkel-side-postulatet forteller at: *To trekanten er kongruente hvis de har to parvis like lange sider med samme vinkel mellom de to sidene.*

Her er $|AC| = |CD|$ og $|BC| = |CE|$. Vinklene er toppvinkler og $\angle BCA = \angle ECD$. SVS-postulatet er oppfylt og trekantene er kongruente:

$$\triangle ACB \cong \triangle DCE \quad \square$$

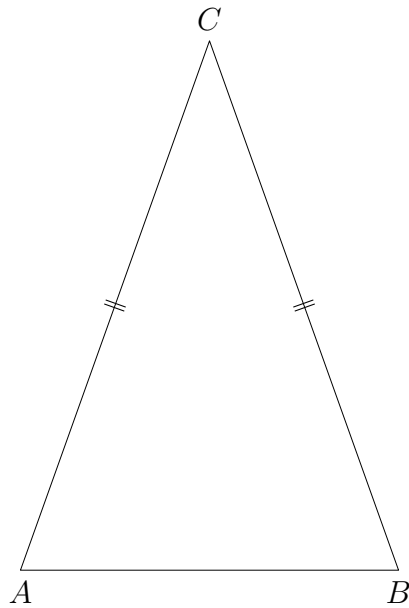
Oppsummering

- SVS (Side-Vinkel-Side) - de har like lange sider som danner en like stor vinkel. Engelsk: SAS (Side-Angle-Side)
- SSS (Side-Side-Side) - de har like lange sider
- VSV (Vinkel-Side-Vinkel) - de har to like store vinkler og ei side som er like lang. Engelsk: ASA (Angle-Side-Angle)
- SSV (Side-Side-Vinkel) - to like lange sider og motstående vinkel til den lengste sida like. Engelsk: SSA (Side-Side-Angle)

3.3 Likebeinte trekanten

Kongruens benytter vi ofte i bevis. Nå kan vi se på hvordan vi kan bevis egenskaper ved likebeinte trekanten ved hjelp av kongruens.

Den likebeinte trekanten er en spesiell type trekant vi ofte støter på i geometrien. Slik ser den ut:



Definisjon 5 Likebeint trekant

I en likebeint trekant er to sider like lange

Figuren viser en likebeint trekant $\triangle ABC$ hvor lengden av AC og BC er lik. De kalles ofte beina i trekanten og AB kalles grunnlinja.

De likebeinte trekantene har noen egenskaper det kan være greit å kjenne til.

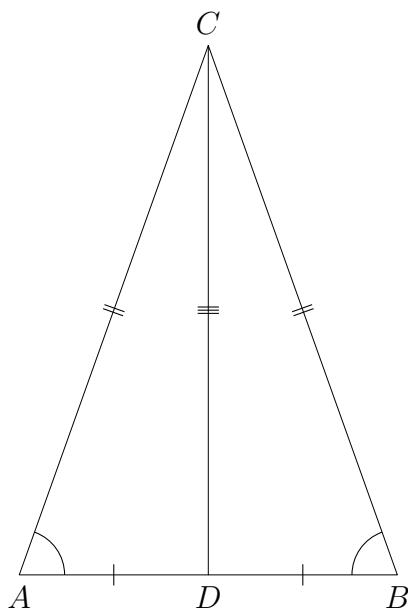
- vinklene ved grunnlinja er like store
- høyden deler grunnlinja i to like lengder

Vinklene ved grunnlinja er like store

Vi kan vise at $\angle ABC = \angle CAB$.

Bevis 3

Vi starter med utgangspunkt i figuren over og finner midtpunktet på AB som vi gir navnet D .



Fra D tegner vi inn linjestykket DC . Nå vet vi at lengden av AD er den samme som DB . Vi kan skrive det som $|AD| = |DB|$.

Da vil vi ved SSS, alle sidene er like lange, ha at

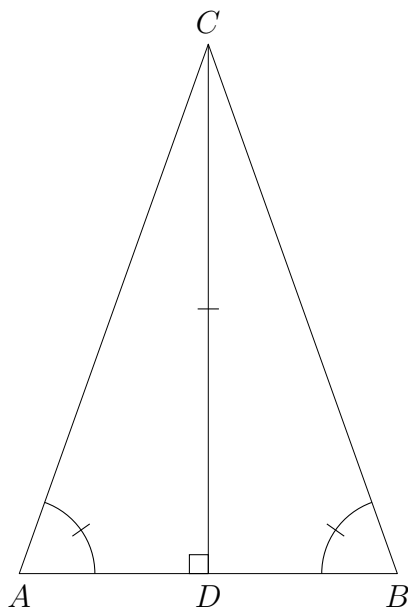
$$\triangle ADC \cong \triangle BDC$$

Det betyr at $\angle ABC = \angle CAB$.

□

Bevis 4

Vi kan også vise at hvis de to vinklene ved grunnlinja er like store, så må beina være like lange. Vi starter med å tegne en trekant med to like store vinkler ved grunnlinja



I trekanten feller vi ned en normal fra C til grunnlinja AB og kaller punktet den skjærer grunnlinja for D . Vi vet at $\angle DAC = \angle DBC$, at $\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$ og at CD er ei

felles side. Da kan vi ved VVS påstå at

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC$$

Det betyr at lengden av AC og lengden av BC må være like og at $\triangle ABC$ er likebeint. $\square$

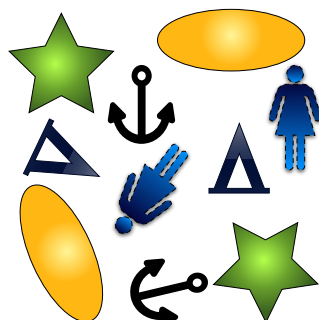
Høyden deler grunnlinja i to like lengder

Høyden fra C er linjestykket som står vinkelrett på grunnlinja. Ut fra forrige bevis kan vi konkludere med at den deler grunnlinja i to like store deler, men vi kan også vise det ut fra den første figuren.

Bevis 5

Tar vi utgangspunkt i første figur har vi vist at $\triangle ADC \cong \triangle BDC$. Det betyr at $\angle ADC = \angle BDC$ og at de to vinklene til sammen vil være 180° . Da må begge være 90° og vi har vist at $CD \perp AB$, altså er CD høyden i $\triangle ABC$. $\square$

3.4 Kongruensavbildninger – isometri

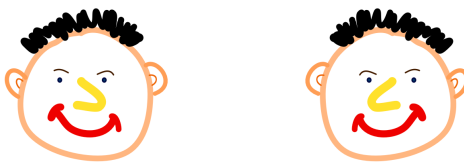


Kongruente figurer kan flyttes på uten at noe skjer med formen. Flyttingen kan vi kalle for *kongruensavbildninger* og skje på flere måter.

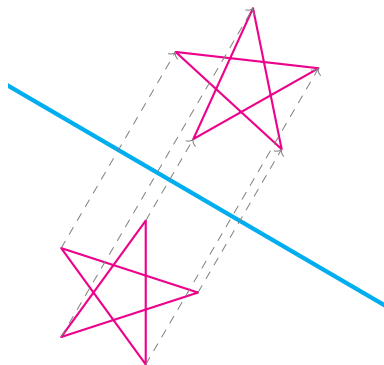
- speiling
- rotasjon
- parallellforskyving
- glidespeiling

Kongruensavbildninger kan vi også kalle for *isometrier*.

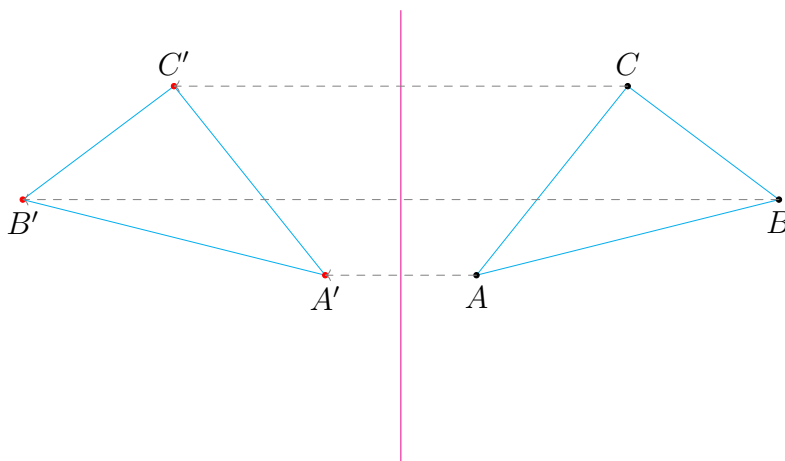
Speiling



En speiling krever ei *speilingslinje* som figuren skal speiles over. Hvert punkt på figuren skal ligge like langt fra speilingslinja som i den speilte figuren. I figuren under kan vi se to speilte figurer og speilingslinja. Legg merke til hvordan punktene ligger like langt fra speilingslinja.



Vi kan formulere det mer matematisk ved å starten med en trekant $\triangle ABC$ og ei speilingslinje. Avstanden fra A til et nytt punkt A' skal være like langt. Avstanden fra A til speilingslinja vil være normalen fra punktet til linja. Det nye punktet A' kan vi derfor plassere i samme avstand på den samme normalen. Gjentar vi det samme for de andre punktene vil vi få speilingen $\triangle A'B'C'$.



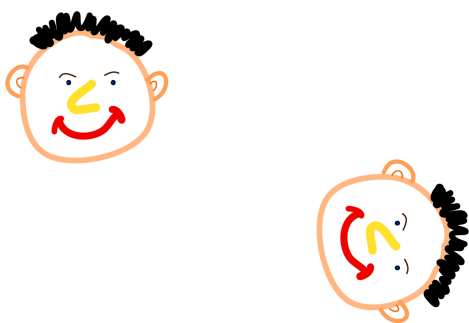
Vi kan definere hva speiling er på samme måte

Definisjon 6 Speiling

En speiling om ei rett linje l skjer ved at et vilkårlig punkt P avbildes som P' på motsatt side av l . P og P' har samme avstand fra l . Linja PP' står vinkelrett på l

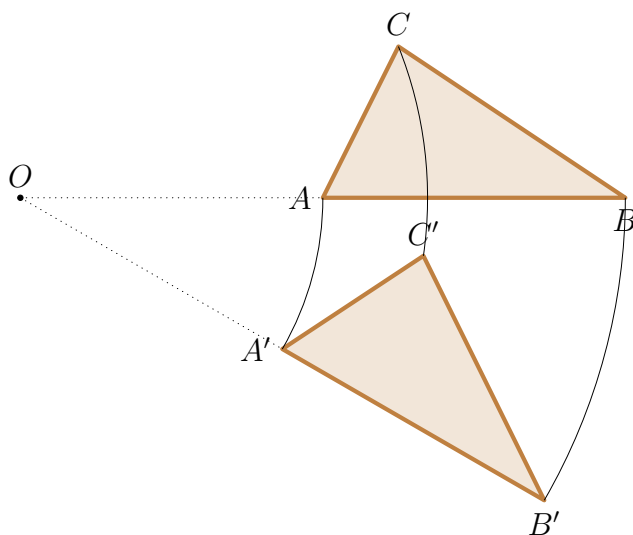
Rotasjon

Det ligger i navnet: En rotasjon roterer, eller «snur» noe.



Geometriske figurer kan vi betrakte som en samling av mange punkter. Hvert punkt i figuren blir rotert i en rotasjon. Da må vi vite hvor mye punktene roterer og vi må også ha ett punkt de roterer ut fra.

Figuren under viser $\triangle ABC$ og punktet O . Starter vi med punkt A og roterer det med 30° om punkt O får vi punktet A' . Det samme kan vi gjøre for alle punktene i $\triangle ABC$ og ende opp med $\triangle A'B'C'$.



Som vi ser må vi vite rotasjonsvinkelen og vi må vite hvilket punkt vi roterer om.

Definisjon 7 Rotasjon

En rotasjon er bestemt ved et punkt og en vinkel. Vi kaller det rotasjonssentrum, O , og rotasjonsvinkel, v . Et vilkårlig punkt P avbildes som P' slik at $|PO| = |P'O|$ og $\angle POP' = v$.

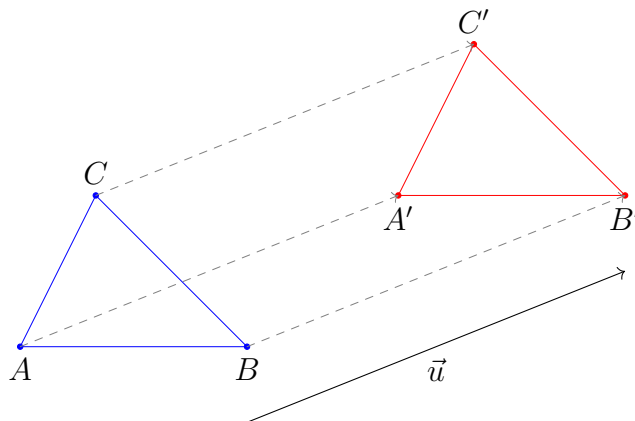
Parallellforskyving

Punkter kan også flyttes langs ei linje. Flytter vi alle like langt og parallelt med linja ender vi opp med en parallellforskyving.



Vi må kjenne retningen og hvor langt punktene skal flyttes. En vektor er en størrelse med en retning. Kjenner vi den vet vi hvordan vi kan avbilde punktene. Vektorer dukker ofte opp i matematikken og notasjonen er et navn med ei pil over: $\vec{u}$.

Har vi en trekant og en slik vektor kan vi flytte på den. I figuren har vi $\triangle ABC$ og $\vec{u}$. Vektoren forteller oss retningen og hvor langt hvert punkt skal flyttes.



Da ender vi opp med den nye trekanten $\triangle A'B'C'$ og vi har gjennomført en parallellforskyving.

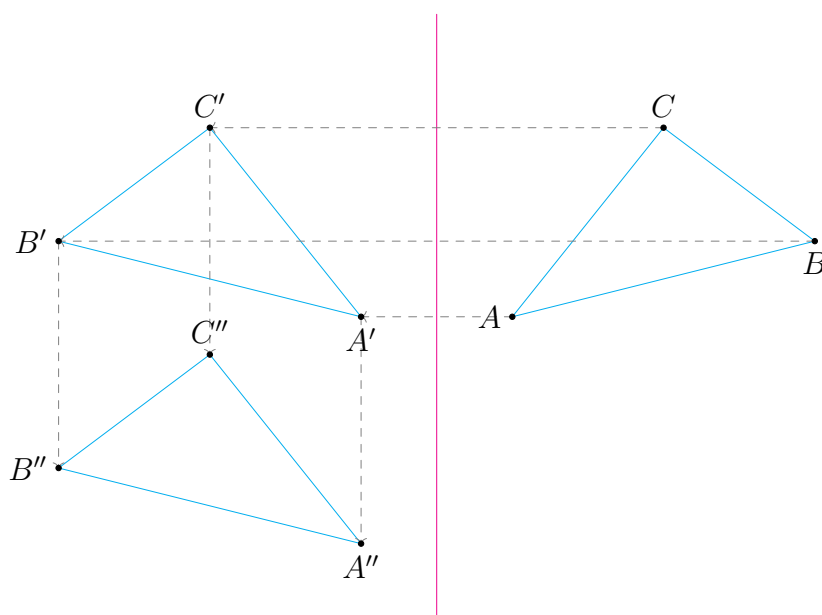
Definisjon 8 Parallellforskyving

En parallellforskyving er bestemt av en retning og en lengde: $\vec{u}$. Et vilkårlig punkt P avbildes som P' slik at PP' er parallell med og like lang som $\vec{u}$.

Vi kaller $\vec{u}$ forskyvningsvektoren.

Glidespeiling

En glidespeiling er en sammensetning av en parallellforskyving og en speiling. Starter vi med $\triangle ABC$ og speiler den ender vi opp med $\triangle A'B'C'$. En parallellforskyving gjør at vi får $\triangle A''B''C''$. Til sammen blir det en glidespeiling.



Definisjon 9 Glidespeiling

Glidespeiling er en speiling og en parallellforskyving hvor forskyvingsvektoren er parallell med speilingslinja.

4 Formlikhet

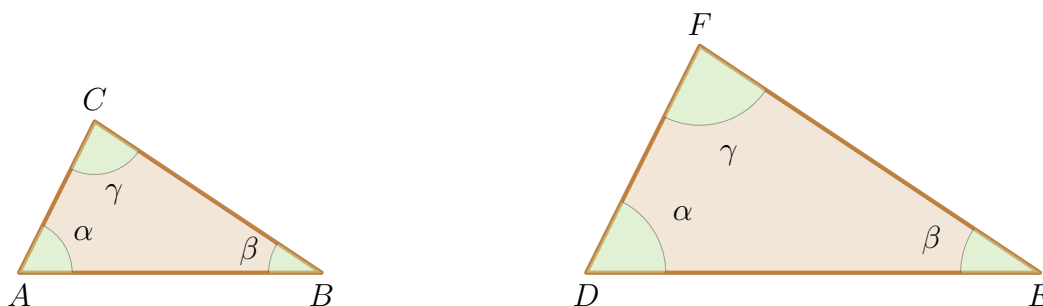
Formlikhet – ordet forteller hva det betyr. To figurer er formlike når de har samme form. Tidligere har vi vært innom kongruens. Da kreves det både samme form og samme størrelse. Nå er det bare formen som er det viktige.



De to tegningene viser samme figur, men størrelsene er forskjellige. Hver detalj har samme form og figurene er formlike. Ved en skalering, at vi forstørrer eller forminsker, kan vi lage den ene av den andre.

4.1 Formlike trekanter

To trekanter vil være formlike hvis de har de samme vinklene.



Vi skriver det slik:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

4.2 Sidene i formlike trekanter

Når trekantene er formlike er den ene en skalering av den andre. Det utnytter vi ofte til å finne ukjente sider.

Tar vi utgangspunkt i de to trekantene, og passer på at vi velger sider som er vinkelbein til de like store vinklene, har vi at

$$|AB| = k \cdot |DE|$$

$$|AC| = k \cdot |DF|$$

$$|BC| = k \cdot |EF|$$

hvor k er en målestokk. Sidelengdene vil bestemmes av målestokken. Hvis $k > 1$ vil det være en forstørrelse og hvis $k < 1$ en forminskelse.

Her er det også mulig å skrive om og få

$$\frac{|CA|}{|FD|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CB|}{|FE|} = k$$

Forholdene kan vi sette opp på mange måter, men her er det viktig å passe på at vi får parvis samhørende sider. Et godt tips kan være å sette opp trekantene ved siden av hverandre som over. Da kan vi også f.eks. se at

$$\frac{|CA|}{|AB|} = \frac{|CA| \cdot k}{|AB| \cdot k} = \frac{|DF|}{|DE|}$$

Altså at forholdet mellom to sider i en trekant vil være det samme som forholdet med de samhørende sidene i den andre trekanten.

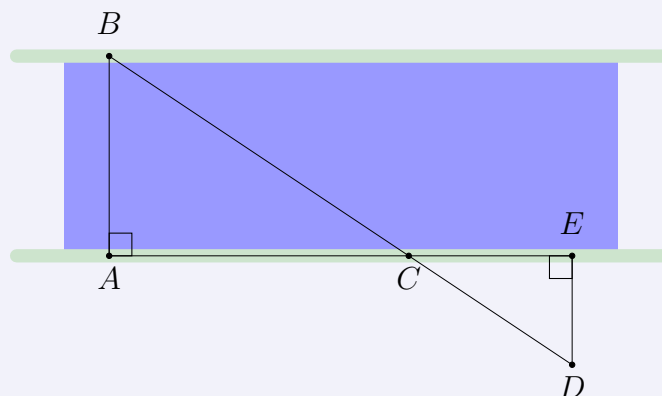
Detter er noe vi utnytter når vi skal løse oppgaver.

4.3 Noen typiske oppgaver

Vi kan se på noen typiske oppgaver hvor formlikhet utnyttes.

Oppgave 2

Vi skal bestemme bredden av ei elv mellom punktene A og B. Vi måler avstandene $AC = 33$ m, $CE = 18$ m og $ED = 12$ m.



Hva er bredden AB av elva?

Løsningsforslag

Trekantene $\triangle ACE \sim \triangle ECD$ fordi

- $\angle ACB = \angle ECD$ siden de er toppvinkler
- $\angle CAB = \angle CED = 90^\circ$

Når to vinkler er de samme må også den tredje vinkelen være like stor.

Da kan vi sette opp to forhold som må være like hverandre:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|EC|}$$

Vi regner ut:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|EC|}$$

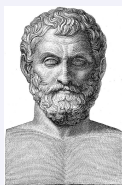
$$\frac{|AB|}{33} = \frac{12}{18}$$

$$|AB| = 33 \cdot \frac{12}{18} = 22$$

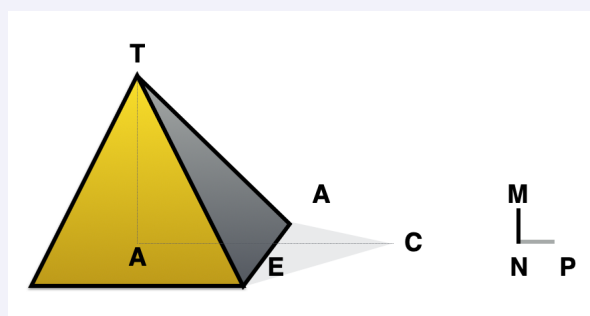
Svar: Bredden av elva er 22 m

Her er en oppgave henta fra eksamen i grunnskolen våren 2011

Oppgave 3



Historien forteller oss at Thales fra Milet (gresk filosof som levde omtrent 600 fvt.) imponerte alle da han bestemte høyden av Keopspyramiden i Egypt. Han målte opp pyramiden og fant ut at grunnflata var kvadratisk med sidekanter lik 230 m. Så tok han å satte opp en pinne litt bortenfor pyramiden og kunne måle skyggene som både pyramide og pinnen kastet. Figuren under viser lengden av pinnen som NM og lengden av skyggen pinnen kastet som NP . Lengden av skyggen fra pyramiden er EC .

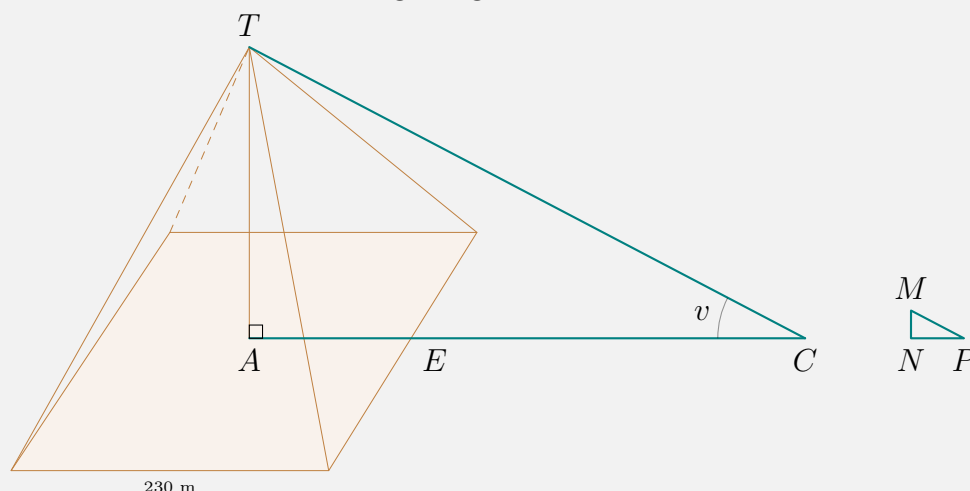


Thales målte skyggen til pyramiden og fant $EC = 431$ m. Pinnen han satte opp var to meter høy og skyggen til den var 7.5 m.

Ta utgangspunkt i figuren til Thales og finn høyden av pyramiden.

Løsningsforslag

Det er lurt å starte med en god figur



Thales kunne vise at det er to formlike trekanter gitt at solvinkelen er omtrent den samme. Da har vi at $\triangle ACT \sim \triangle NPM$. Det gjør at vi kan finne høyden ved å sette opp forhold mellom sidelengdene i de to trekantene.

Vi vet at sidekanten i Keopspyramiden er 230 m. Pyramiden er regulær (ikke skeiv), og da blir avstanden $AE = \frac{230}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{AT}{AC} &= \frac{NM}{NP} \\ \frac{h}{115 + 431} &= \frac{2}{7.5} \\ h &= 546 \cdot \frac{2}{7.5} = 145.6\end{aligned}$$

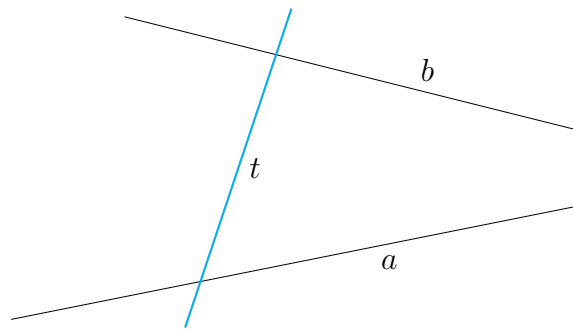
Svar: Høyden er 145.6 meter

4.4 Transversalsetningen

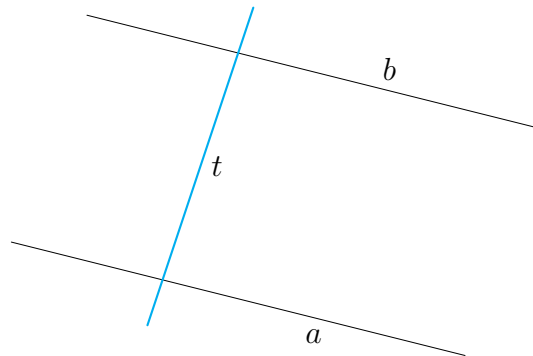
Transversalsetningen er en setning, eller et teorem, som dukker opp i flere sammenhenger. Vi får bruk for den når vi skal fullføre en del bevis samtidig som den viser noen interessante geometriske sammenhenger. Skal vi bevise det vi allerede har brukt om forholdet mellom sidene i formlike trekanter får vi bruk for denne setningen.

Hva er en transversal?

Først må vi bli enige om hva vi mener med en transversal. Store norske leksikon forklarer at en transversal er «linje som skjærer én bestemt kurve eller flere kurver.». Se [SNL](#). I vår sammenheng kan vi bytte ut «kurve» med «linje». En transversal blir da ei rett linje som skjærer ei, eller flere, andre rette linjer.



Er to linjer som skjæres av en transversal parallelle får vi en transversal vi kan kalle en *paralleltransversal*.



Vi kommer til å se på paralleltransversaler i trekanter og kan gi denne definisjonen.

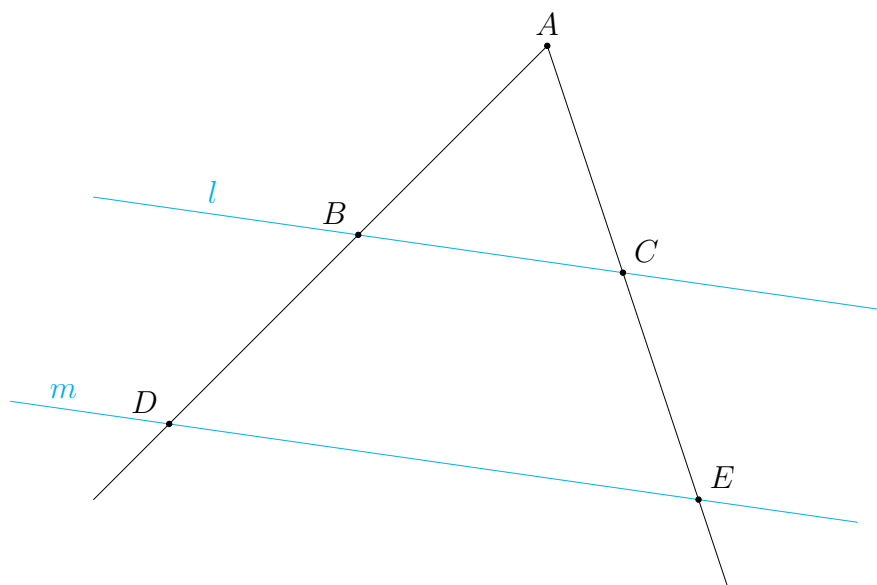
Definisjon 10 Transversal

Ei linje som skjærer to eller flere linjer.

Da er vi klare til å se på transversalsetningen

Transversalsetningen

Vi starter med en figur.



Med utgangspunkt i figuren kan vi formulere denne setningen.

Teorem 6 Transversalsetningen

La m og l være to linjer som skjærer over vinkelbeina til en vinkel med toppunkt A . l skjærer det ene vinkelbeinet i B og det andre i C og m skjærer det ene vinkelbeinet i D og det andre i E .

Da gjelder at

$$l \parallel m \iff \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$$

Transversalsetningen forteller oss at hvis linjene l og m er parallelle så gjelder det at $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$. Den forteller også det motsatte: Hvis $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$, så må linjene l og m være parallelle. Det er derfor ekvivalenstegnet er benyttet.

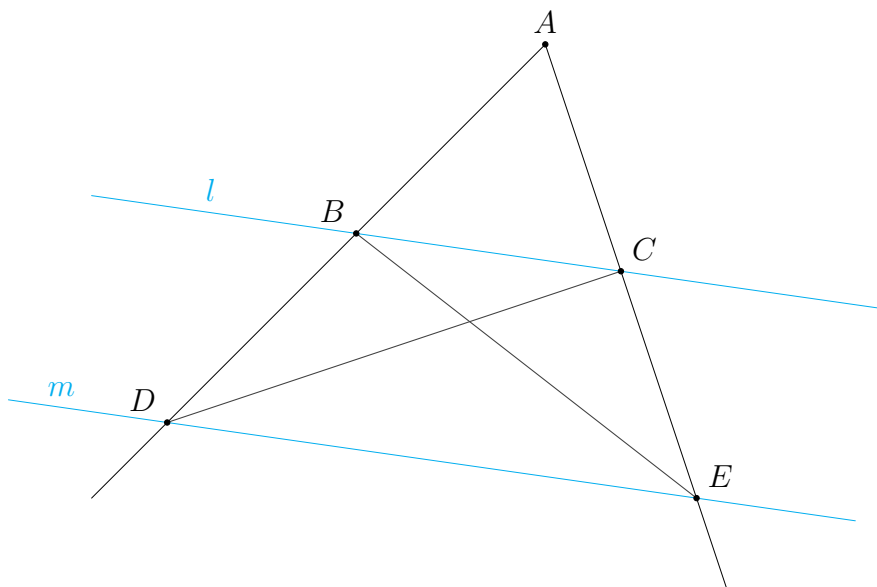
Bevis

Før vi går i gang med beviset kan det være greit å merke seg skrivemåten

$$\alpha(\triangle ADC)$$

Det betyr arealet av trekant ADC og vil bli brukt for å spare litt plass.

Vi tegner linjestykkene DC og BE og får denne figuren.



Bevis 6

Vi antar at $l \parallel m$ og har da at

$$BC \parallel DE \implies \alpha(\triangle DEB) = \alpha(\triangle DCE)$$

Begge trekantene har samme grunnlinje og samme høyde fordi de to linjene er parallelle. Nå kan vi se på flere arealer og observere at

$$\alpha(\triangle ADE) - \alpha(\triangle DEB) = \alpha(\triangle ABE)$$

$$\alpha(\triangle ADE) - \alpha(\triangle DCE) = \alpha(\triangle ADC)$$

Når vi vet at $\alpha(\triangle DEB) = \alpha(\triangle DCE)$ betyr det at

$$\alpha(\triangle ADC) = \alpha(\triangle ABE)$$

$\triangle ABC$ og $\triangle ADC$ har samme høyde. Det betyr at forholdet mellom lengdene av grunnlinjene i de to trekantene må være det samme som forholdet mellom arealene. Det gir

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\alpha(\triangle ABC)}{\alpha(\triangle ADC)} = \frac{\alpha(\triangle ABC)}{\alpha(\triangle ABE)} = \frac{|AC|}{|AE|}$$

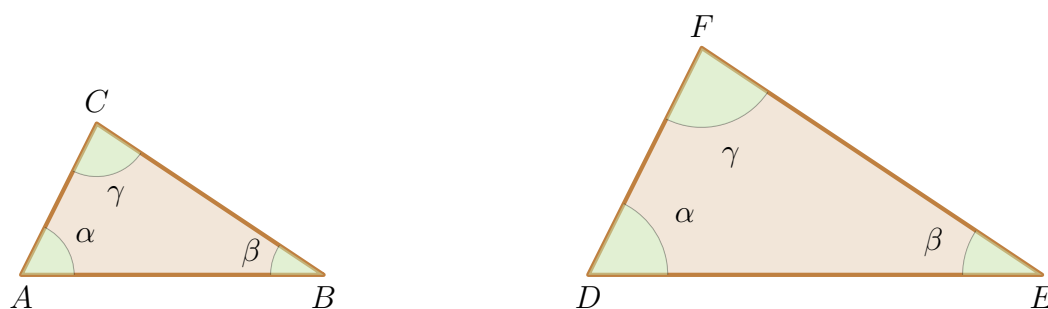
□

Sidene i formlike trekanter

Tar vi utgangspunkt i transversalsetningen kan vi nå bevise at forholdene mellom sidene i to formlike trekanter gjelder.

Figuren under viser to formlike trekanter

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



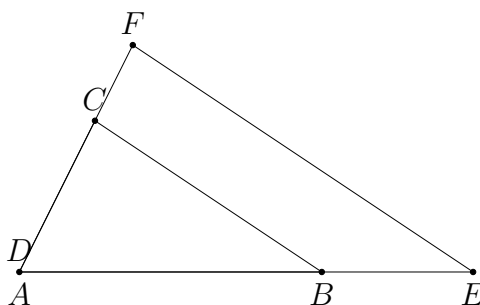
De er formlike siden vinkelene er parvis like store og vi har at

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

Dette kan bevises med transversalsetningen.

Bevis 7

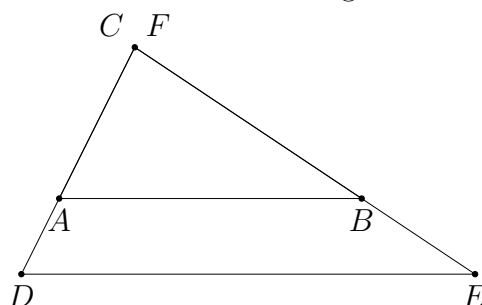
De to trekantene er formlike og flyttes slik at vi får denne figuren.



Fra transversalsetningen har vi at

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

Vi kan også flytte trekantene slik at vi får denne figuren



Transversalsetningen gir

$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

Da har vi vist at

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

□

Ut fra at vi vet

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

kan vi også se at

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|}$$

eller

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|DE|}$$

og alle mulige andre varianter av forhold.

Tips: Tegn opp trekantene ved siden av hverandre og hold tunga rett i munnen. Matpapir kan være lurt hjelpemiddel.

5 Pytagoras

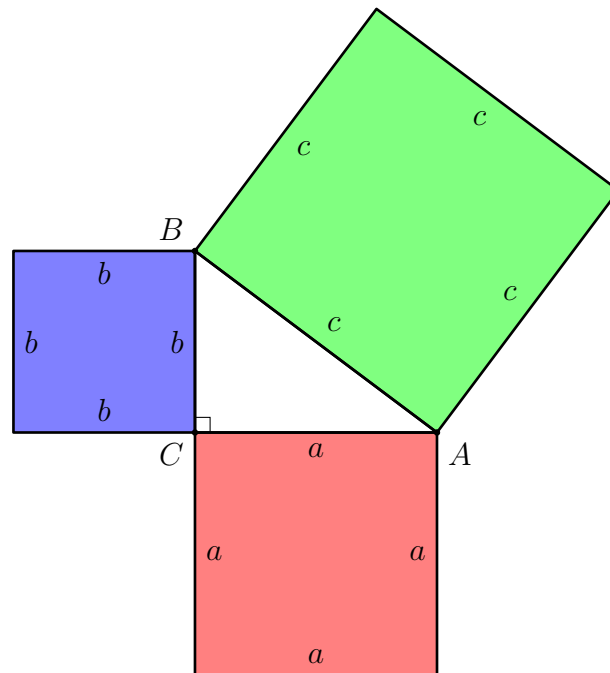
Pytagoras ble født på den greske øya Samos omtrent 570 f. Kr. og har gitt navnet til denne læresetningen eller teoremet. Et teorem er et matematisk påstand som er bevist. Han syslet med langt flere studier enn akkurat dette, blant annet musikk og fysikk. Faktisk var det ikke han som først fant denne setningen heller. I dag vet vi at andre kulturer kjente til dette forholdet lenge før Pytagoras.

5.1 Læresetningen til Pytagoras

Pytagoras sin læresetning kan vi formulere på flere måter. Her er en vanlig formulering.

Teorem 7 Pytagoras' læresetning

I en rettvinkla trekant er arealet av kvadratet med side lik hypotenusen lik summen av arealene av kvadratene med sider lik hver katet.



Figuren illustrerer setningen hvor vi har at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Setningen kan formuleres på flere måter. Et alternativ er denne:

I en rettvinkla trekant er kvadratet av lengden av hypotenusen lik summen av kvadratene av lengdene til katetene.

Ut fra definisjonene kan vi også formulere den omvendte pytagorassetningen:

Teorem 8 Den omvendte pytagorassetningen

Hvis summen av arealene av kvadratene på to sider er lik arealet av kvadratet på den siste sida er trekanten rettvinkla

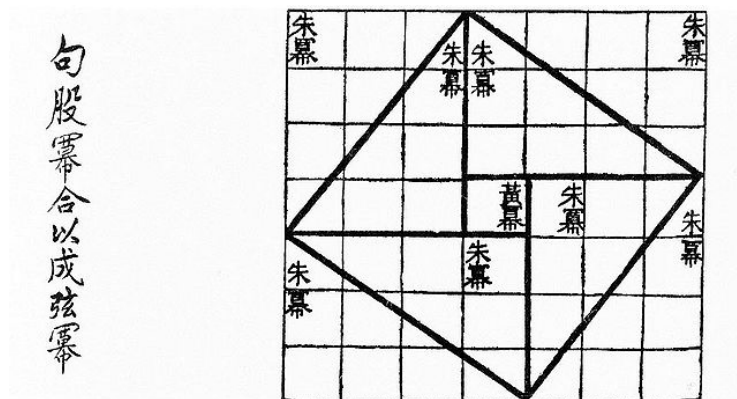
Den siste setningen krever et eget bevis som vi skal se på seinere, men først nå skal vi se på noen bevis for at pytagorassetningen stemmer.

5.2 Bevis av setningen

Det fins svært mange bevis for Pytagoras sin setning. [Wikipedia: Pythagorean theorem](#) viser noen og har lenker til andre varianter. Her kommer noen av de vanligste.

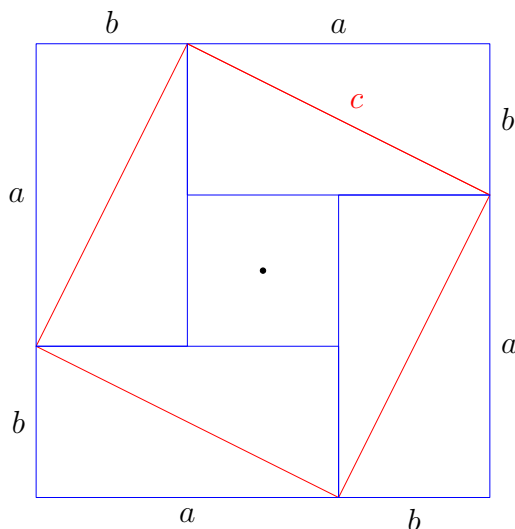
Chou Pei

Chou Pei Suan Ching, eller Zhou Bi Suan Jing, er en av de eldste kinesiske bøkene. Direkte oversatt er det på norsk: Den aritmetiske klassikeren om Gnomon og de sirkulære stiene i himmelen. Bøkene er fra Zhou-dynastiet som varte fra 1046 til 256 f. Kr. Seinere er bøkene samlet og utvidet. Figur 5.1 viser en figur hentet fra en av bøkene. Vi tegner opp den på nytt og setter navn på sidene og ender opp med figur ???. Den vil vi benytte til beviset.



Figur 5.1: Illustrasjon fra Chou Pei Suan Ching

Tegner vi opp det samme og setter på lengder av sidene ser det slik ut:



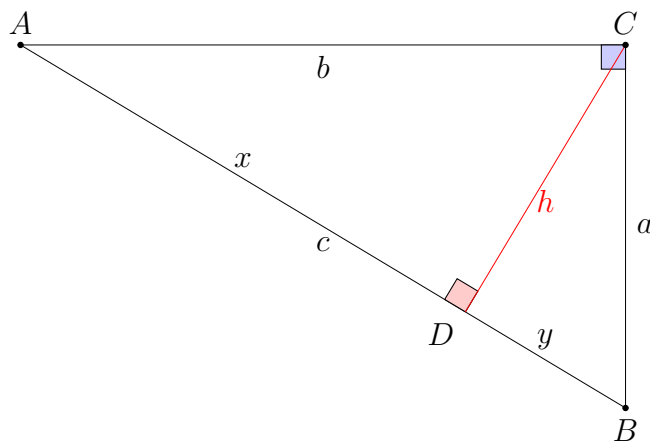
Med utgangspunkt i figuren kan vi føre dette beviset:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

□

Beviset bygger på hvordan vi kan regne ut arealet av det store kvadratet på flere måter. $(a+b)^2$ gir arealet av kvadratet ved å multiplisere sidene med hverandre. Alternativt kan vi finne det samme arealet ved å finne arealet av det røde kvadratet, c^2 og legge til de fire trekantene som mangler.

Bevis med formlike trekanter



I figuren er $\triangle ABC$ en rettvinkla trekant. Vi feller ned en normal fra punktet C og ned på grunnlinja AB . Skjæringspunktet kaller vi D .

Da har vi at $\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle BDC$ fordi alle har en felles vinkel og en annen vinkel som er oppgitt til 90°

Vi setter $AD = x$ og $DB = y$.

At $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ gir:

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \Rightarrow b^2 = cx$$

At $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ gir:

$$\frac{a}{c} = \frac{y}{a} \Rightarrow a^2 = cy$$

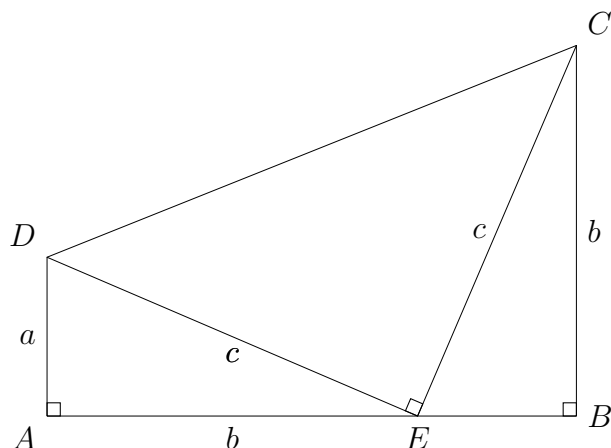
Det kan vi bruke slik:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= cx + cy \\ &= c(x + y) \\ &= c \cdot c = c^2\end{aligned}$$

□

Garfield sitt bevis

James Abram Garfield (1831 – 1881) var den 20. presidenten i USA. I 1876 presenterte han et bevis med utgangspunkt i figuren under.



Først beregnet han arealet av hele trapeset ved å bruke formelen for arealet av et trapes, som er summen av lengdene av de parallelle sidene delt på to ganger høyden

$$\frac{(a+b)}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Vi kan finne det samme arealet ved å ta summen av trekantene:

$$\frac{ba}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2}$$

De to uttrykkene for arealet er like og av det følger beviset:

$$\begin{aligned}\frac{ba}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} &= \frac{(a+b)^2}{2} \\ 2ab + c^2 &= (a+b)^2 \\ 2ab + c^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

□

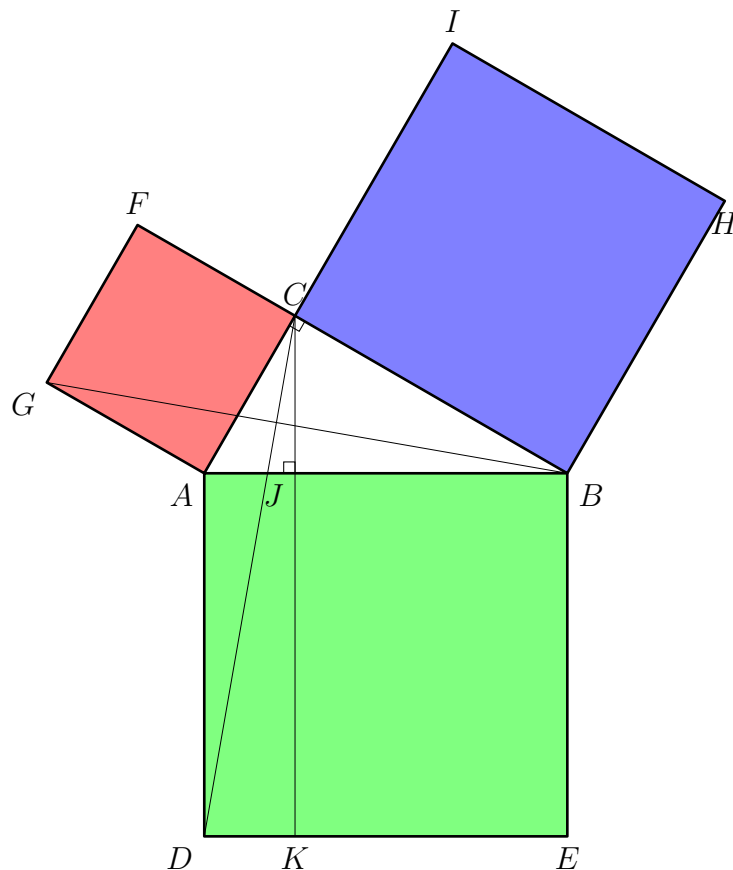
Euklids bevis

Euklid, han som skrev bøkene Elementene, tok også med et bevis for pytagorassetningen. Han tok utgangspunkt i figuren under. Den kalles ofte for «brudens stol». Illustrasjonen i figur 5.2 er hentet fra en eldre utgave av Elementene.

Vi tegner opp figuren til Euklid på nytt.



Figur 5.2: Illustrasjon fra Euklids Elementene



Euklids bevis går ut på å vise at arealet av $\square ADEB$ er det samme som summen av arealene til $\square BHIC$ og $\square ACFG$. Vi skriver arealet av rektanglet $ABED$ som $\alpha(\square ABED)$

Da skal vi vise at $\alpha(\square ABDE) = \alpha(\square CBHI) + \alpha(\square ACFG)$

Med utgangspunkt i figuren fins det flere alternativer.

Alternativ 1 Av figuren ser vi at $\square ADKJ$ og $\triangle ADC$ har samme grunnlinje, AD , og samme høyde, DK . Det betyr at:

$$\alpha(\square ADKJ) = 2 \cdot \alpha(\triangle ADC)$$

Vi kan også vise at:

$$\alpha(\square ACFG) = 2 \cdot \alpha(\triangle ABG)$$

siden begge har felles grunnlinje AG og felles høyde GF .

Så kan vi vise at

$$\triangle ADC \cong \triangle ABG$$

Av figuren kan vi se at den ene er en 90° rotasjon av den andre om punktet A . Kongruensen kan vi vise med kongruenssetningen: side-vinkel-side. Vi har at $AG = AC$ og at $AD = AB$. Så har vi at: $\angle BAG = \angle DAC = 90^\circ + \angle BAC$.

Da følger det at:

$$\alpha(\square ADKJ) = 2 \cdot \alpha(\triangle ADC) = 2 \cdot \alpha(\triangle ABG) = \alpha(\square ACFG)$$

Vi kan følge samme framgangsmåte for å vise at: $\alpha(\square CBHI) = \alpha(\square JKEB)$

Da har vi vist at:

$$\alpha(\square ACFG) + \alpha(\square CBHI) = \alpha(\square ADEB)$$

□

Alternativ 2 Vi vil vise at:

$$\alpha(\square ACFG) = \alpha(\square ADKJ)$$

$$\alpha(\square CBHI) = \alpha(\square JKEB)$$

Først viser vi at

$$\alpha(\square ACFG) = \alpha(\square ADKJ)$$

$\alpha(\triangle GAC) = \alpha(\triangle GAB)$ fordi begge har grunnlinje GA og høyde AC . De har samme høyde fordi $\angle ACB$ er rettvinkla og høyden i $\triangle GAB$ er avstanden fra GA til FC . Punktet B ligger også på linja gjennom F og C . Da vil linja BC være parallell med linja GA og de to trekantene har samme høyde.

Da kan vi vise at

$$\alpha(\triangle GAB) = \alpha(\triangle CAD)$$

Det er fordi $\angle GAB = \angle CAD$ siden begge er $90^\circ + \angle CAB$ da er $\triangle GAB \cong \triangle CAD$. Her bruker vi argumentet med side - vinkel - side.

Vi har også at

$$\alpha(\triangle CAD) = \alpha(\triangle JAD)$$

fordi begge har grunnlinja AD og høyde AJ

Setter vi alt det sammen har vi at: $\alpha(\triangle GAC) = \alpha(\triangle JAD)$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\triangle JAD) &= \frac{1}{2} \cdot \alpha(\square ADKJ) \\ \alpha(\triangle GAC) &= \frac{1}{2} \cdot \alpha(\square ACFG) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha(\square ACFG) = \alpha(\square AJKD)$$

Følger vi samme argumentasjon kan vi også vise at $\alpha(\square BCIH) = \alpha(\square KEBJ)$ etter samme framgangsmåte som over. Da får vi

$$\alpha(\square ABED) = \alpha(\square BCIH) + \alpha(\square ACFG)$$

□

Alternativ 3 Vi starter med å vise at:

$$\triangle ABC \sim \triangle AJC$$

Det kan vi vise ved at begge trekanter er rettvinkla og begge trekanter har $\angle BAC$ felles.

Da vet vi at $\frac{AJ}{AC} = \frac{AC}{AB}$ og vi har at:

$$\begin{aligned}\frac{AJ}{AC} &= \frac{AC}{AB} \\ AJ &= AC \cdot \frac{AC}{AB} \\ AJ \cdot AB &= AC \cdot AC \\ AC^2 &= AJ \cdot AB\end{aligned}$$

Nå vet vi at $AD = AB$ og da betyr det vi har funnet at:

$$\alpha(\square ACFG) = \alpha(\square ADKJ)$$

Følger vi samme framgangsmåte kan vi vise at:

$$\triangle ABC \sim \triangle CBJ$$

Da har vi at $\frac{BC}{AB} = \frac{JB}{BC}$. Gjør vi samme utregning får vi at

$$BC^2 = AB \cdot JB$$

Da vet vi at:

$$\alpha(\square CBHI) = \alpha(\square JKEB)$$

og vi har vist at:

$$\alpha(\square ACFG) + \alpha(\square CBHI) = \alpha(\square ADEB)$$

□

Alternativ 4 Vi starter med å vise at

$$\alpha(\triangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot \alpha(\square ADKJ)$$

Grunnlinja i $\triangle ADC$ er AD og høyden er AJ . AD og AJ er også høyde og bredde i $\square ADKJ$.

Så finner vi arealet av $\triangle ADC$. Først viser vi at det er det samme som arealet av $\triangle ABG$. Vi kan vise at $\triangle ADC \cong \triangle ABG$. Det stemmer siden

$$\begin{aligned}AD &= AB \\AC &= AG \\ \angle CAD &= \angle GAB\end{aligned}$$

Arealet av $\triangle ADC$:

$$\alpha(\triangle ABG) = \frac{AG \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot AC^2$$

Nå utnytter vi at $\alpha(\triangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot \alpha(\square ADKJ)$ og vi får at:

$$\alpha(\triangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AJ$$

Disse to arealene må være like og vi kan sette opp denne likninga:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AC^2 &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AJ \\ \Downarrow \\ AC^2 &= AB \cdot AJ\end{aligned}$$

Tilsvarende resonnement gir: $BC^2 = AB \cdot JB$

Legger sammen de to lengdene og får denne likninga

$$\begin{aligned}AC^2 + BC^2 &= AB \cdot AJ + AB \cdot JB \\ &= AB \cdot (AJ + JB) \\ &= AB \cdot AB \\ &= AB^2\end{aligned}$$

□

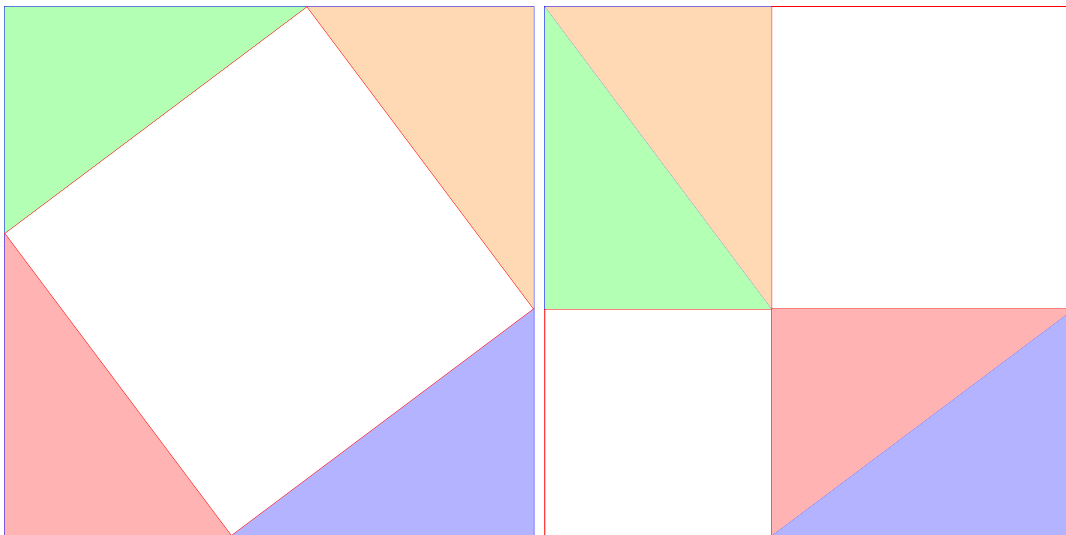
Flytting og bytting

Et annet bevis kan føres ved å flytte trekanter. Se på figur 5.3. Kan du se beviset?

Arealet av det hvite området er det samme i begge figurene. I den ene er det kvadratet på hypotenusen. I den andre figuren er det kvadratene på hver av katetene.

5.3 Bevis for den omvendte setningen

Den omvendte setningen forteller at vinkelen i en trekant hvor $a^2 + b^2 = c^2$ må være rett. Den kan også bevises på flere måter. Her er noen alternativer.

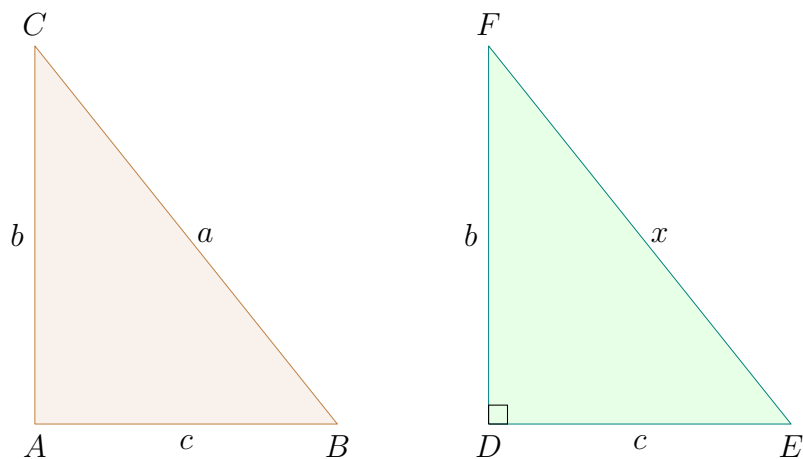


Figur 5.3: Flytting av trekanter

Alternativ 1 Vi starter med $\triangle ABC$ hvor vi har at

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (5.1)$$

Vi skal viset at $\angle BAC$ er en rett vinkel.



Det neste vi gjør er å konstruere en rettvinkla trekant $\triangle DEF$ slik at $DE = AB = c$ og $DF = AC = b$. Vi kaller $EF = x$.

I $\triangle DEF$ er $\angle D = 90^\circ$ og da sier pytagorassetningen at forholdet mellom sidene i den konstruerte trekanten er

$$x^2 = b^2 + c^2 \quad (5.2)$$

I $\triangle ABC$ har vi gitt likning 5.1. Ved sammenlikning av de to likningene 5.1 og 5.2 får vi

$$a^2 = x^2 \implies a = x$$

Ved kongruenspostulatet SSS har vi da at

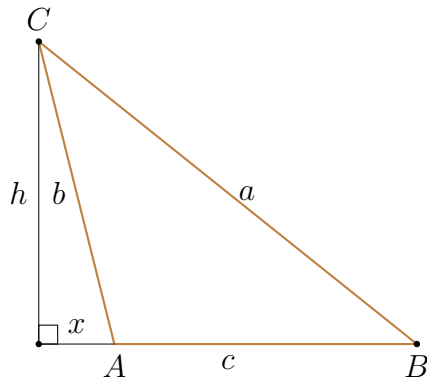
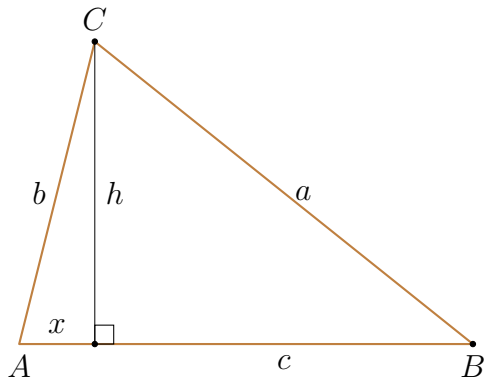
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Det betyr at $\angle A = \angle D$ og at $\angle A$ er en rett vinkel.

□

Alternativ 2 Vi tegner en trekant med sidelengdene $BC = a$, $AC = b$ og $AB = c$ og skal bevise at hvis $a^2 = b^2 + c^2$ så må $\angle A = 90^\circ$.

Tegner vi en tilfeldig trekant og feller ned normalen fra C på AB kan vi ha to tilfeller.



Vi kan vise at normalen fra C må treffe AB i punktet A . Kaller vi avstanden fra normalens fotpunkt og A for x får vi

$$a^2 = h^2 + (c \pm x)^2 = h^2 + c^2 \pm 2cx + x^2$$

Vi har også at

$$x^2 + h^2 = b^2$$

som vi kan sette inn i det forrige uttrykket og få

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cx$$

Utgangspunktet var at $a^2 = b^2 + c^2$. Det betyr at $x = 0$ noe som betyr at normalen vil treffe i punktet A . Altså $\triangle ABC$ er rettvinkla. □

6 Periferivinkelsetningen

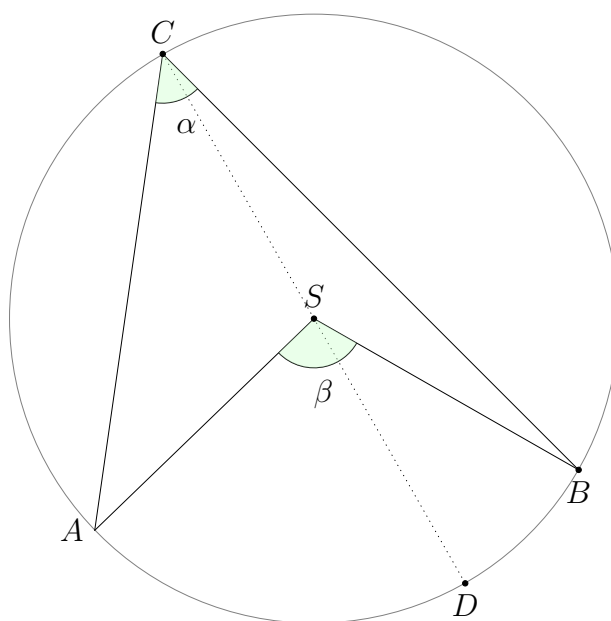
6.1 Periferivinkelsetningen

Først må vi være enige om hva en periferivinkel og en sentralvinkel er.

Definisjon 11 Periferi- og sentralvinkel

En periferivinkel er en vinkel med toppunkt på sirkelperiferien.
En sentralvinkel er en vinkel med toppunkt i sentrum av sirkelen.

I figur 6.1 er β en sentralvinkel og α en periferivinkel.



Figur 6.1: Periferi- og sentralvinkel

Det er en viktig sammenheng mellom disse to vinklene:

Teorem 9 Periferivinkelsetningen eller sentralvinkelsetningen

Når en periferivinkel og en sentralvinkel spenner over samme sirkelbue, så er periferivinkelen halvparten så stor som sentralvinkelen.

Dette teoremet, eller læresetningen, kan bevises på flere måter.

Bevis 8

Tar vi utgangspunkt i figur 6.1 ser vi at både periferivinkelen og sentralvinkelen deles i to deler av diameteren CD . Vi har at

$$\alpha = \angle ACS + \angle SCB \quad (6.1)$$

$$\beta = \angle ASD + \angle DSB \quad (6.2)$$

Ut fra det vi vet om vinkelsummen i en trekant har vi at

$$\angle SAC + \angle ACS + \angle CSA = 180^\circ$$

Ut fra definisjonen av en sirkel har vi at alle radiene er like lange. Det betyr at $SA = SC$ og at $\triangle ASC$ er en likebeint trekant. Det betyr igjen at $\angle SAC = \angle ACS$.

Da er $\angle CSA = 180^\circ - \angle ASD$ og det fører til at

$$\begin{aligned} \angle SAC + \angle ACS + \angle CSA &= 180^\circ \\ \Downarrow \\ \angle ACS + \angle ACS + (180^\circ - \angle ASD) &= 180^\circ \\ \Downarrow \\ \angle ASD &= 2 \cdot \angle ACS \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tilsvarende får vi for $\triangle BSC$

$$\angle DSB = 2 \cdot \angle SCB \tag{6.4}$$

Setter (3) og (4) inni (2)

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \cdot \angle ACS + 2 \cdot \angle SCB \\ &= 2 \cdot (\angle ACS + \angle SCB) \\ &= 2 \cdot \alpha \end{aligned}$$

Hvilket skulle bevises.

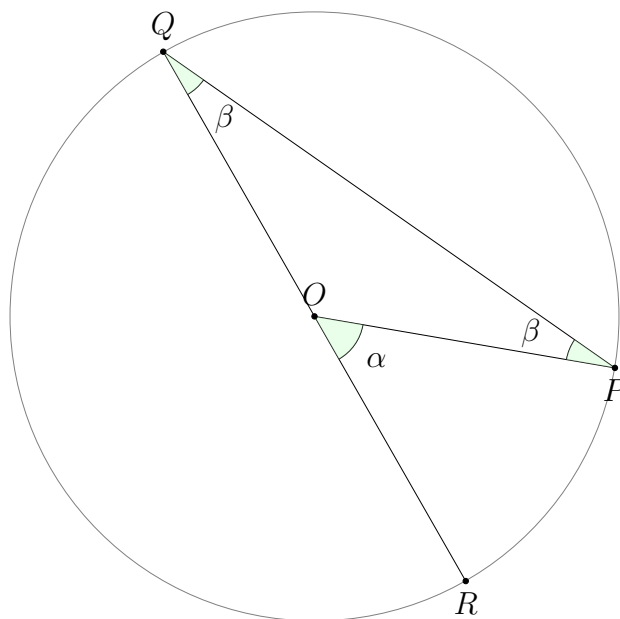
□

Kanskje tar ikke beviset over hensyn til alle tilfeller av sentral- og periferivinkler? Et mer utfyllende bevis kan ta utgangspunkt i flere tilfeller.

Bevis 9

Vi kan se på tre mulige tilfeller av periferi- og sentralvinkler.

Tilfelle 1

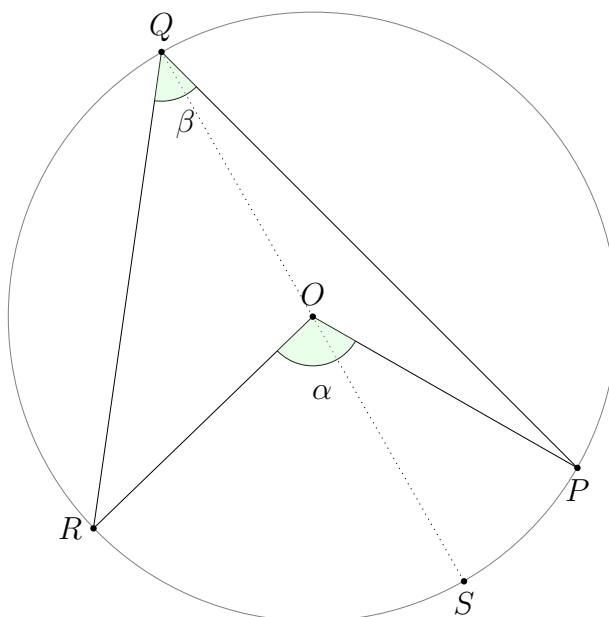


I dette tilfellet ligger QOR på samme linje. Vi har da en likebeint trekant $\triangle POQ$ fordi sidene OQ og OP begge er radius i sirkelen. Vi vet da at vinklene $\angle QPO$ og $\angle PQO$ er like store. La oss kalle disse vinkelene β . Legg også merke til at dette er periferivinkelen. Da har vi at $\angle POQ = 180^\circ - 2 \cdot \beta$. Nå vet vi at sentralvinkelen, som vi kan kalle α , er:

$$\alpha = \angle POR = 180^\circ - \angle POQ = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \beta) = 2 \cdot \beta$$

Altså: $\alpha = 2 \cdot \beta$

Tilfelle 2 I dette tilfellet ligger sentrum, O , inne i periferivinkelen. Vi trekker da ei hjelpelinje og ender opp med denne figuren



Da har vi at sentralvinkelen er: $\alpha = \angle POS + \angle SOR$

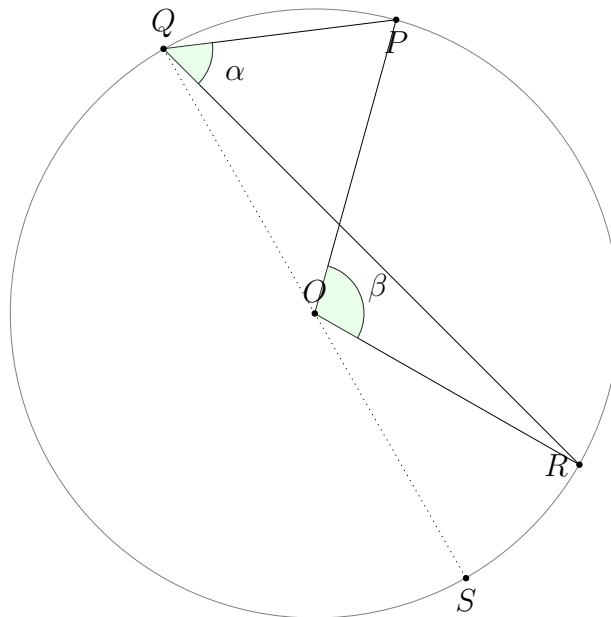
Vi har da to figurer som er identiske med tilfelle 1. Vi vet da at

$$\begin{aligned}\angle POS &= 2\angle PQS \\ \angle SOR &= 2\angle SQR\end{aligned}$$

Setter inn og får

$$\begin{aligned}\alpha &= \angle POS + \angle SOR \\ &= 2\angle PQS + 2\angle SQR \\ &= 2(\angle PQS + \angle SQR) &= 2 \cdot \beta\end{aligned}$$

Tilfelle 3



Vi trekker igjen ei hjelpelinje gjennom fra Q gjennom sentrum.

Vi har at $\alpha = \angle POR = \angle POS - \angle ROS$.

Igjen har vi to figurer som er identiske med det første tilfellet, og vi vet igjen at

$$\begin{aligned}\angle POS &= 2\angle PQS \\ \angle SOR &= 2\angle SQR\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \angle POR \\ &= \angle POS - \angle ROS \\ &= 2\angle PQS - 2\angle RQS \\ &= 2(\angle PQS - \angle RQS) \\ &= 2 \cdot \beta\end{aligned}$$

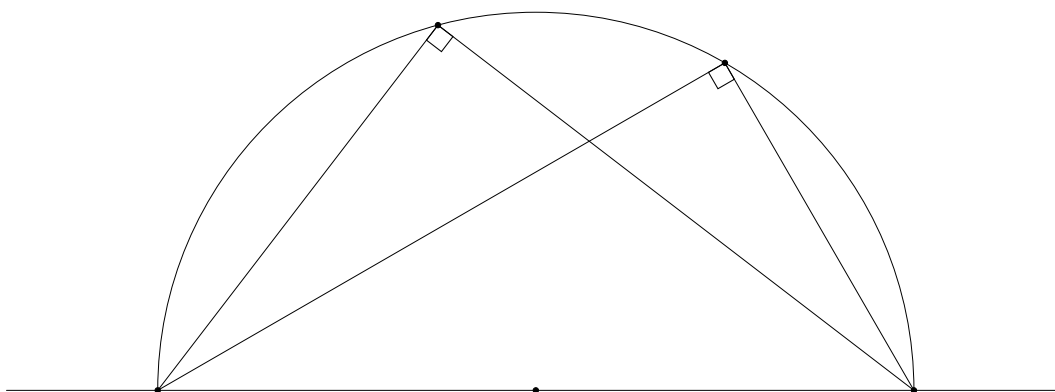
□

6.2 Tales setning

Denne setningen har fått navnet sitt etter Tales fra Millet. Se mer her [Wikipedia: Tales fra Milet](#). Navnet på matematikere fra gamle dager er blitt brukt i flere sammenhenger og det fins flere setninger som har samme navn. Legg også merke til at navnet skrives både med og uten «h»: Thales eller Tales. Denne setningen er et spesialtilfelle av periferivinkelsetningen.

Teorem 10 Tales setning

En periferivinkel som spenner over en bue på 180° er 90°



Det er noe vi ofte benytter oss av i konstruksjoner.

DGP: Utforsk periferivinkelsetningen

Bruk GeoGebra eller et annet DGP. Tegn en sirkel med sentrum. Sett av punkter på sirkelen slik at det dannes en sentral- og periferivinkel som spenner over samme bue. Mål vinklene for å se om periferivinkelsetningen stemmer.

6.3 Noen oppgaver

Vi benytter periferivinkelsetningen i mange sammenhenger. Her er en oppgave som viser akkurat det. Prøv å unngå å se på løsningen før du har fått prøvd deg.

Oppgave 4

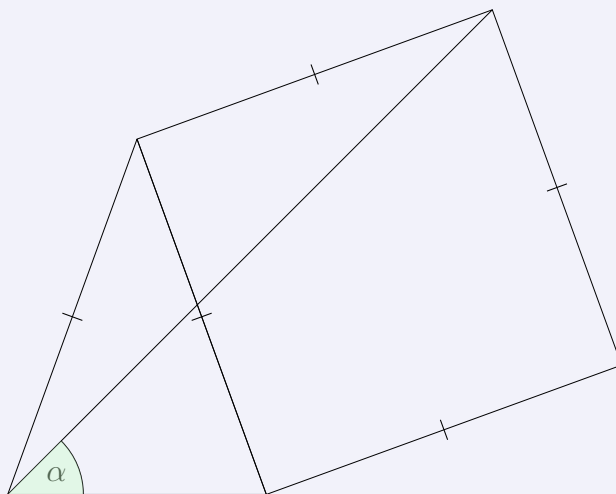
I $\triangle ABC$ er $AB = 20$ og $\angle C = 90^\circ$. Normalen fra C treffer AB i punktet H . $CH = a$. Finn for hvilke verdier av a vi har to, en eller ingen trekanter som mulige løsninger.

Løsningsforslag

Tenk på setningen til Tales. C vil ligge på en halvsirkel med diameter lik AB . Tegn opp! Da kan du se at det er en løsning når $a = 10$, ingen løsning når $a > 10$ og to løsninger når $a < 10$.

Oppgave 5

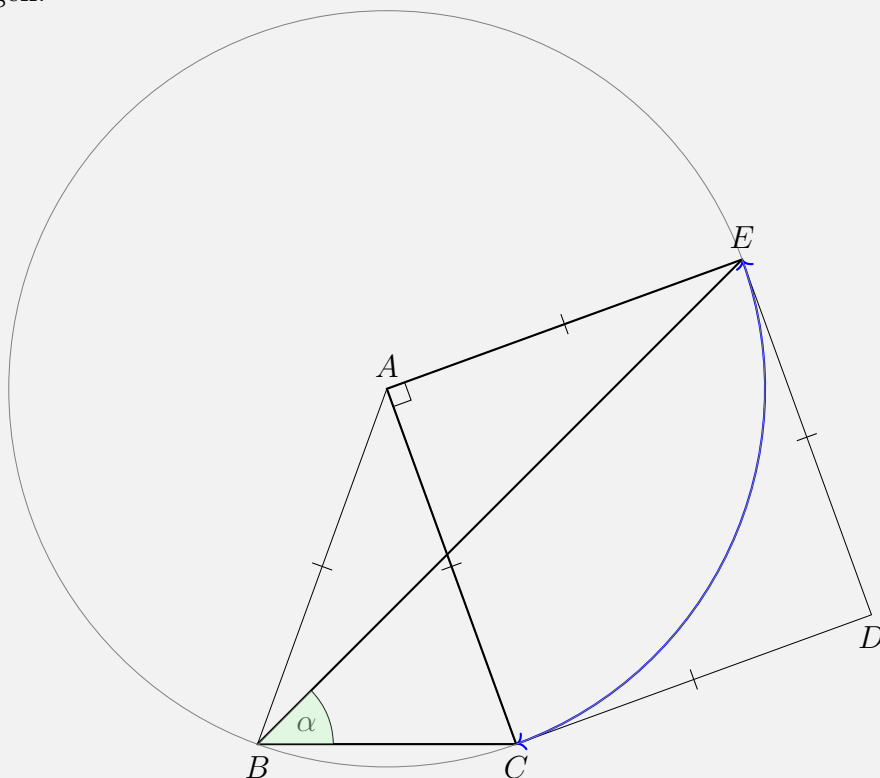
På en likebeint trekant konstrueres det et kvadrat på det beinet. Resultatet blir som i figuren under.



Fra det motsatte hjørnet i trekanten trekkes det en diagonal til det øvre hjørnet i kvadratet. Hvor stor blir vinkel α ?

Løsningsforslag

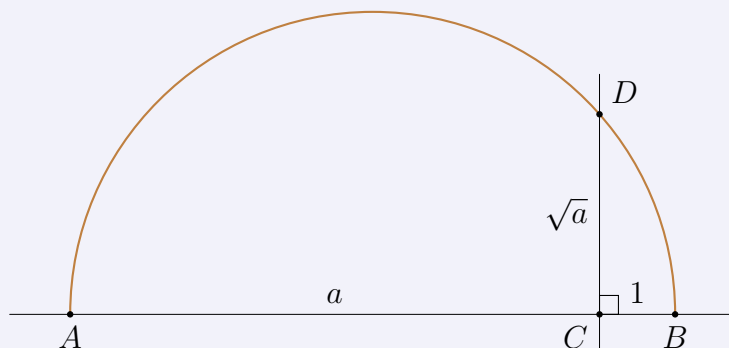
Dette er en oppgave hvor det er vanskelig å vite hvor en skal starte. Det er nok lurt å tenke på hva det er vi får opplyst. Her er det mange sider som er like lange og trekanten er likebeint. Kanskje kan det være en ide å prøve å konstruere figuren – enten med passer eller med f. eks. GeoGebra? I så fall vil det bli behov for å tegne en sirkel og der ligger nok løsningen.



Ved å se nøye på figuren er det mulig å se at her har vi med en sentral- og periferivinkel å gjøre. Sentralvinkelen er $\angle EAC$ og periferivinkelen er $\angle EBC$. Begge de to vinklene

spenner over samme bue CE . Da vet vi fra periferivinkelsetningen at $\angle EBC = \frac{1}{2}\angle EAC$. Det betyr at $\angle EBC = 45^\circ$

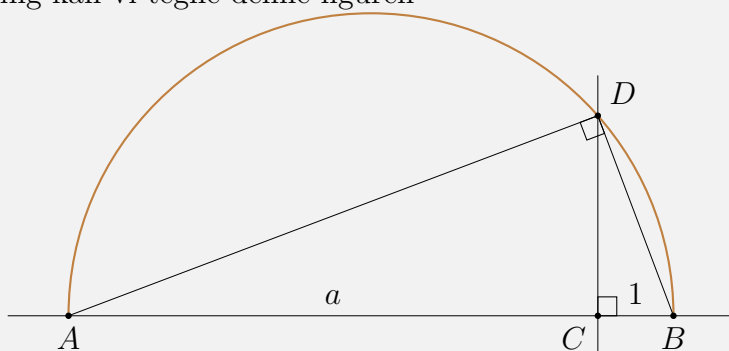
Oppgave 6



Figuren over viser et linjestykke AB som har lengde $(a + 1)$. Linjestyket er diameter i sirkelen s . Punktet C ligger på AB og har avstand a fra A . Linjestykket CD står vinkelrett på linjestykket AB . Punktet D er skjæringspunktet mellom sirkelen og linjestykket CD . Bevis at lengden av linjestykket CD er $\sqrt{a}$.

Løsningsforslag

Ut fra Tales setning kan vi tegne denne figuren



Da har vi at

$$\triangle ABD \sim \triangle DBC$$

fordi begge har en rett vinkel og $\angle B$ felles. Det gjør at vi kan sette opp disse forholdene

$$\begin{aligned} \frac{DB}{AB} &= \frac{BC}{DB} \\ DB^2 &= AB \cdot BC = (a + 1) \cdot 1 = a + 1 \end{aligned}$$

Benytter i pytagorassetningen på $\triangle DBC$ får vi

$$\begin{aligned} BC^2 + CD^2 &= DB^2 \\ CD^2 &= DB^2 - BC^2 = a + 1 - 1 = a \\ CD &= \sqrt{a} \quad \square \end{aligned}$$

7 Analytisk geometri

I det som kalles *analytisk geometri* flytter vi oss inn i koordinatsystemet. Alle punkter får koordinater og vi kan finne likninger som beskriver forskjellige geometriske objekter.

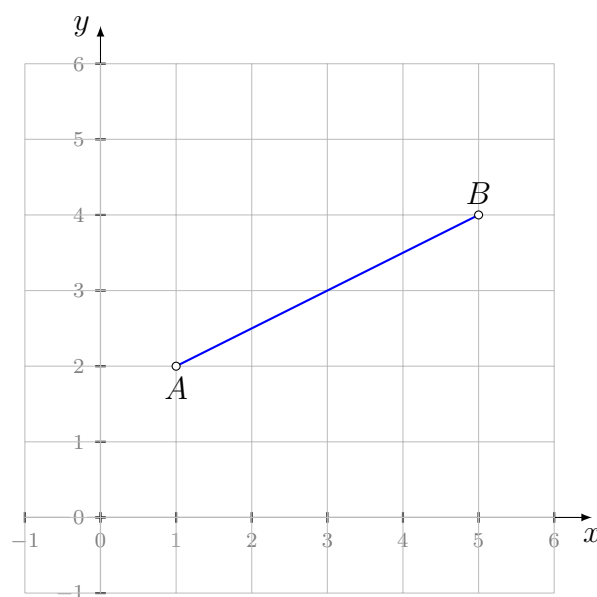
Vi starter med å finne avstanden mellom to punkt.

7.1 Avstanden mellom to punkter

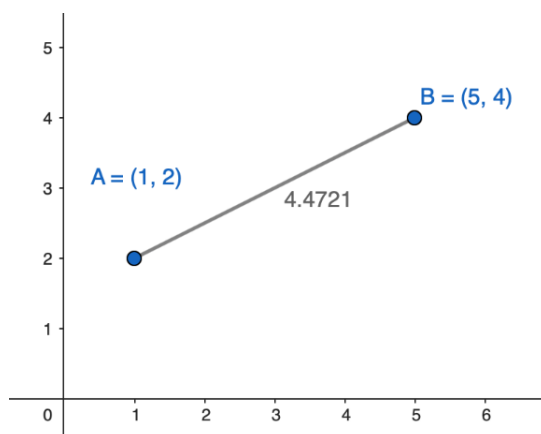
Denne oppgaven gir en smakebit på analytisk geometri. Tenk godt på den før du ser på løsningsforslaget.

Oppgave 7

Punktet A har koordinatene $(1, 2)$ og punktet B har koordinatene $(5, 4)$. Finn lengden av linjestykket mellom de to punktene.



Hvordan tenkte du? I oppgaven er det ikke noe krav til hvordan den løses – det står bare «finn lengden». En tegning og bruk av et eller annet til å måle lengder med kunne i noen tilfeller gitt et svar. Litt mer nøyaktig svar kunne vi fått ved å bruke et DGP. Her er det GeoGebra kommer fram til

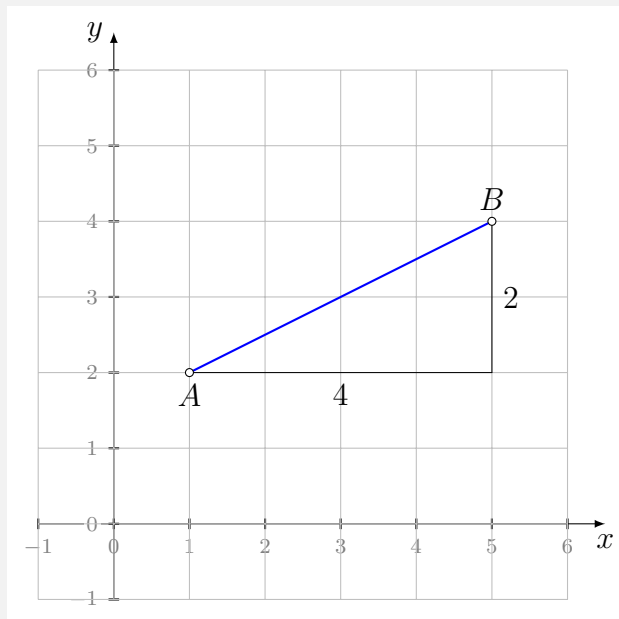


Punktene er tegna inn med oppgitte koordinater. I algebrafeltet kan vi skrive inn koordinatene. Når de er på plass er avstanden på linjestykket mellom de to punktene målt. Lengden er 4.4721. Svaret er funnet, men hva skjuler seg bak det GeoGebra har gjort?

For å regne ut lengden kan vi benytte denne framgangsmåten.

Løsningsforslag

Her er punktene, og linjestykket, i koordinatsystemet. Starter vi i punkt A kan vi også markere hvor langt bort og hvor høgt opp punkt B ligger.

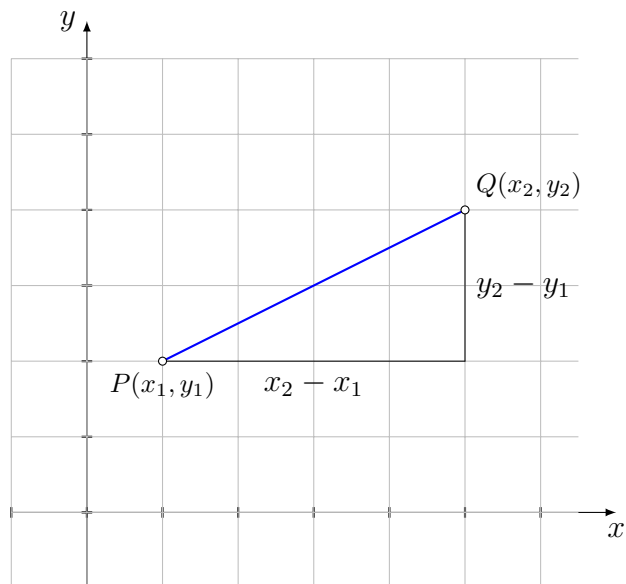


Problemet er nå gjort om til å finne lengden av hypotenusen i en rettvinkla trekant. Det kan vi gjøre ved pytagorassetningen.

$$|AB|^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$|AB| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.472$$

Den samme framgangsmåten kan vi benytte uansett hva koordinatene til de to punktene her. Velger vi to vilkårlige punkt P og Q kan vi tegne linjestykket mellom dem.



Avstanden blir hypotenusen i en rettvinkla trekant. Det to katetene får lengdene $|x_2 - x_1|$ og $|y_2 - y_1|$. Husk at $|$ benyttes som absoluttverditegn og at lengden alltid vil ha positiv verdi. Da har ikke plasseringa til punktene noen betydning.

Når vi nå skal finne lengden av hypotenusen går vi fram som i oppgaven. Vi benytter pythagorassetningen og finne kvadratene. Ser vi på kvadratet av lengden av den horisontale kateten blir det: $(x_2 - x_1)^2$. Hvis punktet Q hadde vært til venstre for P burde vi skrevet $(x_1 - x_2)^2$, men når vi kvadrerer får vi samme resultat.

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 &= x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_1^2 \\(x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2\end{aligned}$$

Verdiene til koordinatene, og med det plasseringene av punktene, spiller ingen rolle for det vi skal finne.

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\|PQ| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$

Dette kaller vi *avstandsformelen*

Teorem 11 Avstandsformelen

Gitt to punkter P og Q med koordinatene $P : (x_1, y_1)$ og $Q : (x_2, y_2)$. Da er avstanden mellom punktene

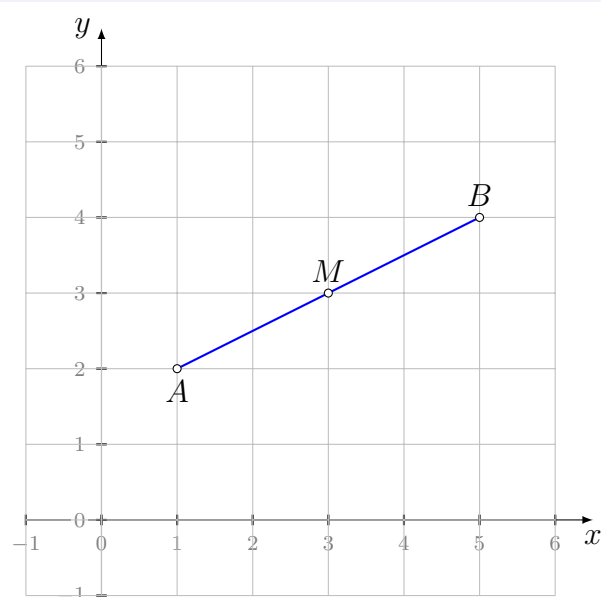
$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7.2 Midtpunktet på ei linje

Hvordan kan vi gå fram for å finne koordinatene til midtpunktet på et linjestykke når vi kjenner koordinatene til endepunktene. Se på oppgaven under og prøv å finne en framgangsmåte.

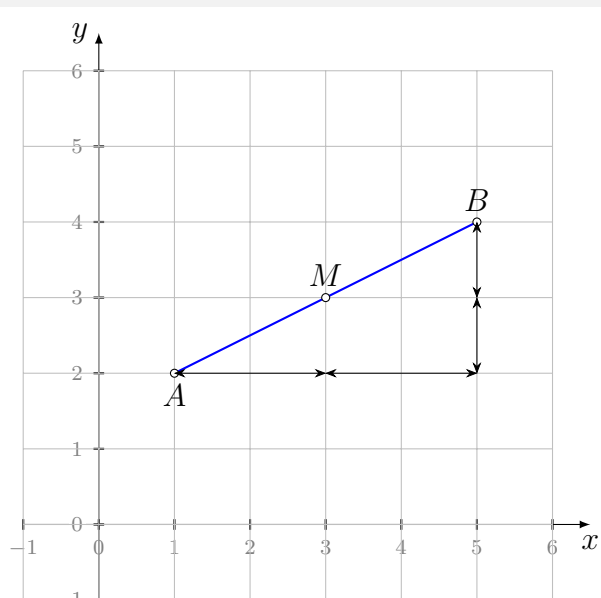
Oppgave 8

Punktet A har koordinatene $(1, 2)$ og punktet B har koordinatene $(5, 4)$. Finn koordinatene til punktet M midt på linjestykket AB .



Fant du at koordinatene må være $(3, 3)$? Det stemmer, her er et forslag til hvordan en kan gå fram.

Løsningsforslag



Ved å studere figuren kan vi se at x-koordinaten til M må ligge midt mellom x-koordinatene til de to punktene, altså midt mellom 1 og 5. Det gir x-koordinaten 3. Det som ligger midt mellom noe kjenner vi som gjennomsnittet av verdiene. Det betyr at x-koordinaten blir:

$$\frac{5 + 1}{2} = 3$$

y-koordinaten ligger også på det gjennomsnittet av de to y-koordinatene:

$$\frac{4 + 2}{2} = 3$$

At dette resonnementet stemmer kan vi prøve å bekrefte ved å bruke DGP.

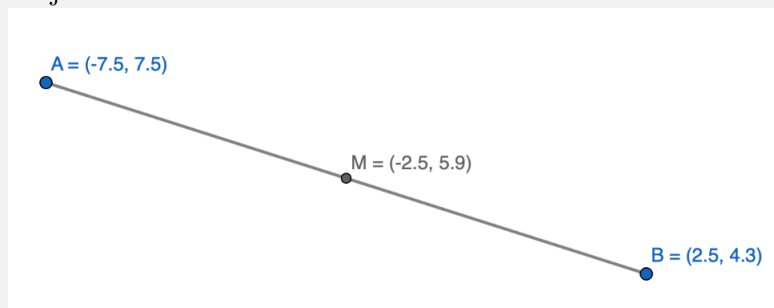


DGP: Undersøk om løsningen din stemmer

Sett av to tilfeldige punkt. Tegn linjestykket mellom dem og be GeoGebra om å finne midtpunktet på linjestykket. Vis koordinatene til alle punktene. Greier du å finne koordinatene ved regning?

Løsningsforslag

Figuren viser et skjermbilde fra GeoGebra.



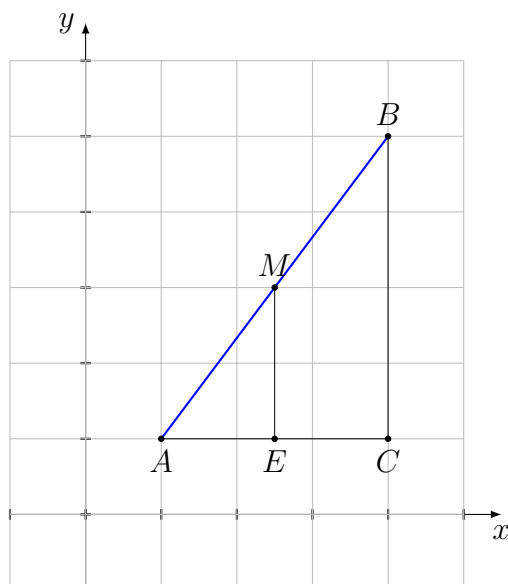
Koordinatene til midtpunktet M kan regnes ut slik:

$$M : \left(\frac{-7.5 + 2.5}{2}, \frac{7.5 + 4.3}{2} \right) = (-2.5, 5.9)$$

Punktene kan flyttes rundt og alle utregningene gir koordinatene til midtpunktet.

Formelen

For å føre et bevis kan vi benytte det vi har funnet ut om formlike trekanter. Tegner vi tilfeldige punkter i et koordinatsystem, og markerer midtpunktet på linjestykket mellom dem som M , kan vi ende opp med dette resultatet



Ut fra figuren kan vi vise at

$$\triangle ACB \sim \triangle AEM$$

fordi $\angle A$ er den samme i begge og begge trekanter har en rett vinkel. Vi vet også at

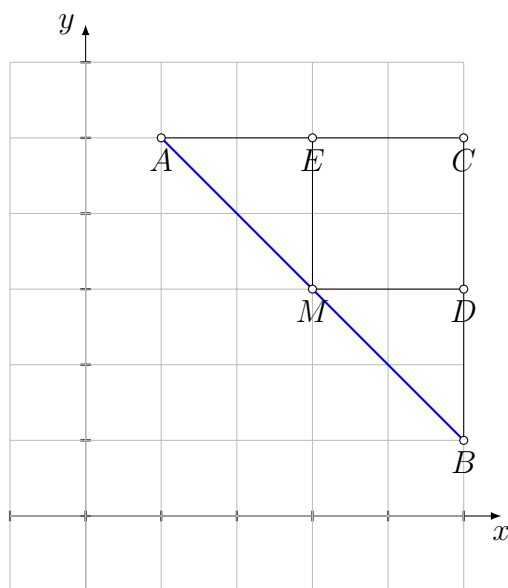
$$|AM| = \frac{1}{2}|AB|$$

Da har vi at

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|ME|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

Det viser at koordinatene til midtpunktet vil ha både x- og y-koordinater midt mellom koordinatene til endepunktene.

Et alternativ er å se på figuren under. Her er det igjen to tilfeldig plasserte endepunkter.



Benytter vi *vinkel-side-vinkel-postulatet* kan vi slå fast at

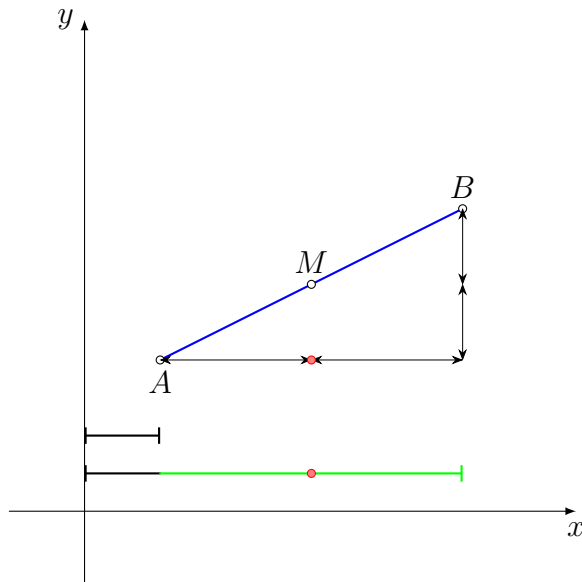
$$\triangle AEM \cong \triangle MDB$$

Trekantene er kongruente fordi de har to vinkler som er like store, $\angle EAB = \angle DMB$ og $\angle EMA = \angle DBM$. Den mellomliggende siden mellom toppunktene er like lange: $|AM| = |MB|$.

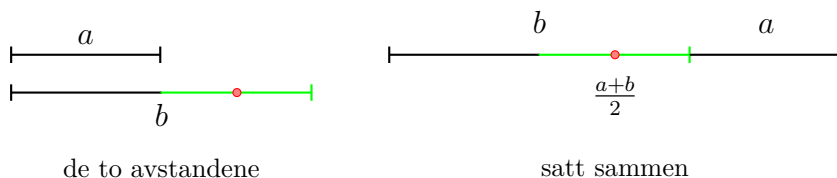
Da vil vi også ha at

$$|AE| = |MD| \quad |CD| = |DB|$$

Nå har vi slått fast at punktet M vil ha x- og y-koordinater som ligger midt mellom koordinatene til endepunktene. Hvordan kan vi finne koordinatene?

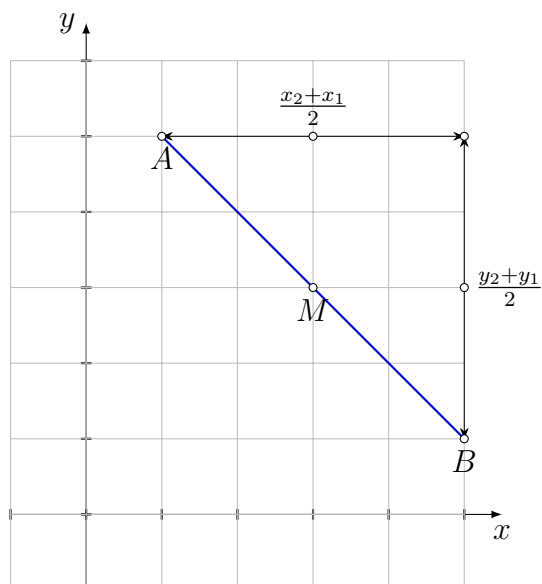


Ser vi på de horisontale avstandene fra y-aksen får vi to avstander til endepunktene. I figuren under er de kalt a og b . Den delen som utgjør forskjellen mellom de to er markert med grønt. Punktet vi skal finne er markert med rødt.



Avstanden til punktet vi skal finne kan vi se er gjennomsnittet av de to avstandene. Gjennomsnittet finner vi ved $\frac{a+b}{2}$. Det samme argumentet gjelder for de vertikale avstandene.

Har punktet A koordinatene (x_1, y_1) og B koordinatene (x_2, y_2) kan vi finne koordinatene til midtpunktet som $\frac{x_2+x_1}{2}$ og $\frac{y_2+y_1}{2}$. Bruk gjerne litt tid på å forsikre deg om at det ikke spiller noen rolle hvor endepunktene er plassert i forhold til hverandre.



Koordinatene til midtpunktet:

$$M : \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

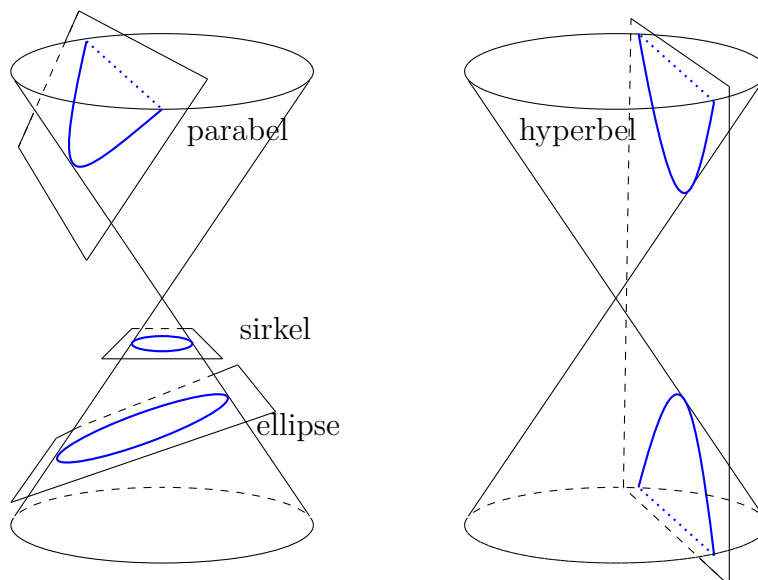
Teorem 12 Koordinatene til midtpunktet

Gitt to punkter P og Q med koordinatene $P : (x_1, y_1)$ og $Q : (x_2, y_2)$. Koordinatene til midtpunktet, M , mellom de to punktene vil være

$$M : \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

8 Kjeglesnittene

Nå skal vi se på kjeglesnittene. La oss starte med navnet. Grunnen til at sirkelen, ellipsen, hyperbelen og parabelen kalles kjeglesnitt skyldes at de kommer fram når vi snitter ei kjegle. Figuren viser hvordan kjegla skal snittes



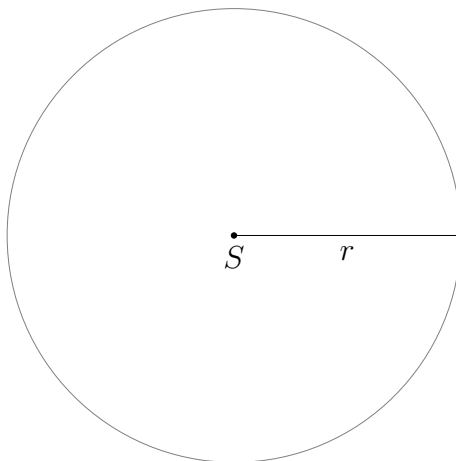
8.1 Sirkelen

Sirkelen kjenner vi godt fra før, men hvordan kan vi forklare hva en sirkel er? Kanskje kan passeren være et godt utgangspunkt. Tegner vi en sirkel vil vi få en strek hvor avstanden til sentrum er like stor uansett hvor på streken vi måler. Omtrent sånn er definisjonen også.

Definisjon 12 Sirkelen

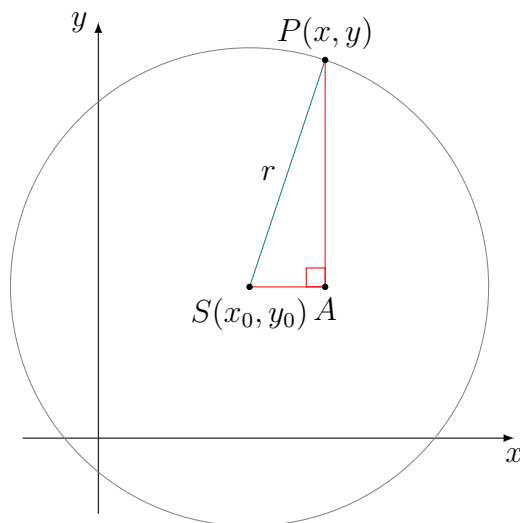
En sirkel er det geometriske stedet for de punktene som har en fast avstand fra et fast punkt

Det faste punktet kaller vi *sentrum* i sirkelen og avstanden kaller vi *radius*.



Likninga for en sirkel

La oss plassere sirkelen i et koordinatsystemet. S er sentrum i sirkelen og har koordinatene (x_0, y_0) . P er et tilfeldig punkt på sirkelperiferien. Radius kaller vi r .



Avstanden fra S til P vet vi er r . Når vi vet koordinatene til S og P kan vi finne avstanden mellom de to punktene ved å benytte setningen til Pytagoras.

I figuren vil punktet A ha koordinatene (x, y_0) og vi kan finne avstandene uttrykt ved x og y

$$|SA| = |x - x_0|$$

$$|AP| = |y - y_0|$$

Da kan vi finne r^2

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Siden vi kvadrerer avstandene kan vi se bort fra absoluttverdien. Kvadratet vil alltid være positivt.

Det vi har kommet fram til kaller vi for standardformen for likninga til en sirkel.

Standardform likninga til en sirkel

Likninga for en sirkel med radius r og sentrum i (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Alle sirkler kan beskrives av denne likninga. I f. eks. GeoGebra kan vi se at sirkellikninga dukker opp når vi tegner en sirkel.

Eksempel 1

En sirkelen med radius 10 og senter i $(5, 8)$ er gitt ved likninga:

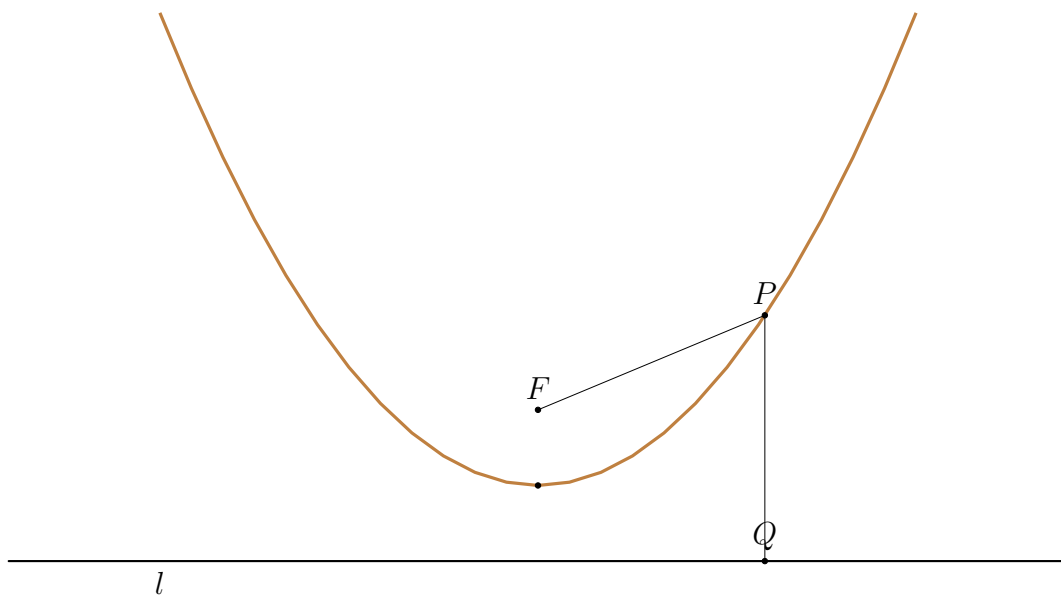
$$(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

8.2 Parabelen

Definisjon 13 Parabel

En parabel er det geometriske stedet for de punktene som ligger i samme avstand fra et punkt F som fra ei linje l . Punktet F er brennpunktet og linja l er styrelinja.

Definisjonen forteller at et vilkårlig punkt P på parabelen vil ligge like langt fra brennpunktet som fra styrelinja.



Punktet F kaller vi *brennpunktet* til parabelen. Bokstaven F kommer fra at det kalles *focus* på engelsk. Linja l kaller vi *styrelinja*.

Uansett hvor punktet P ligger vil

$$|FP| = |PQ|$$

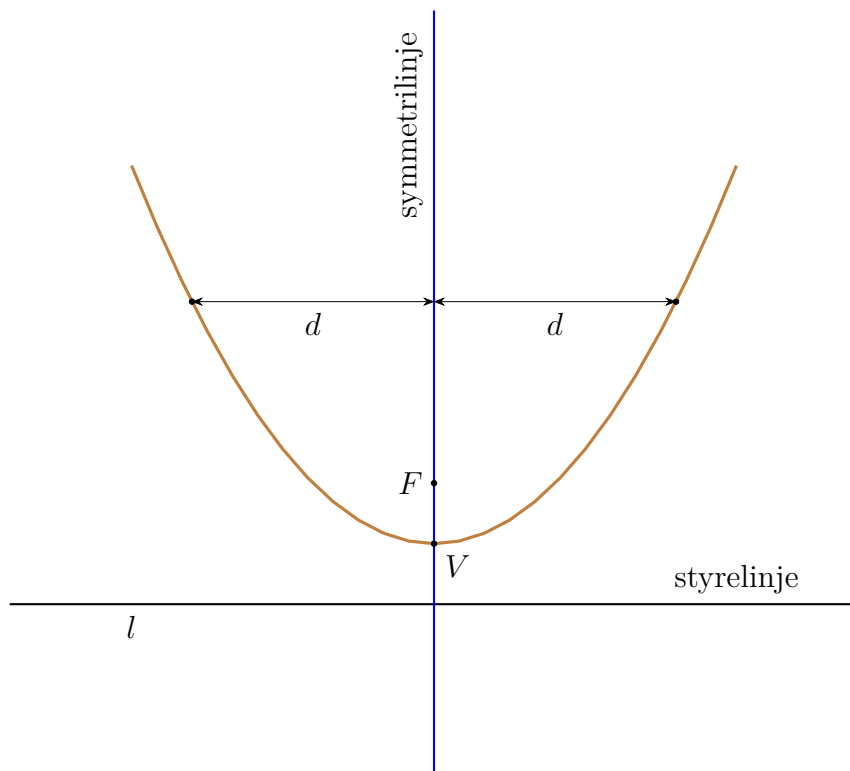


DGP: Parabelen

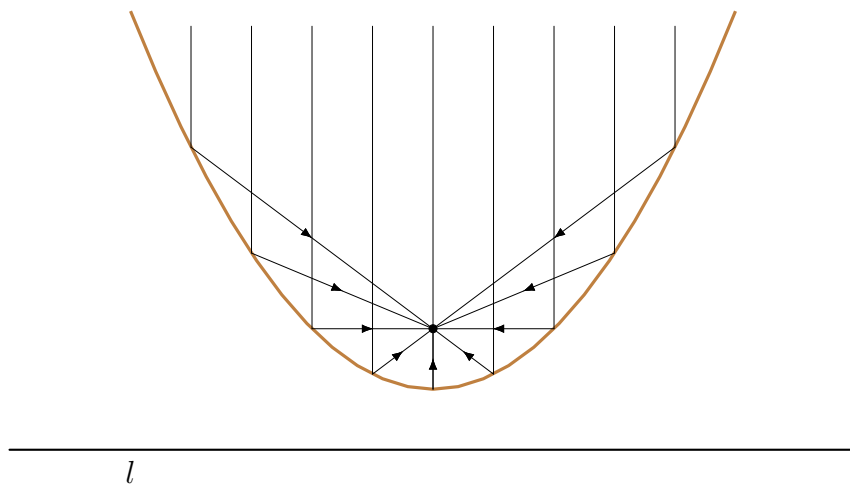
Tegn ei styrelinje og sett av et punkt på styrelinja. Sett av et punkt som et brennpunkt. Lag et linjestykke mellom brennpunktet og punktet på styrelinja. Finn midtnormalen til linjestykket. Alle punktene på parabelen vil nå ligge på skjæringspunktet mellom midtnormalen og en normal på styringslinja gjennom punktet som ble avsatt på styringslinja. Spor punktet og sjekk om sporinga likner en parabel.

Egenskaper ved parabelen

Parabelen er symmetrisk

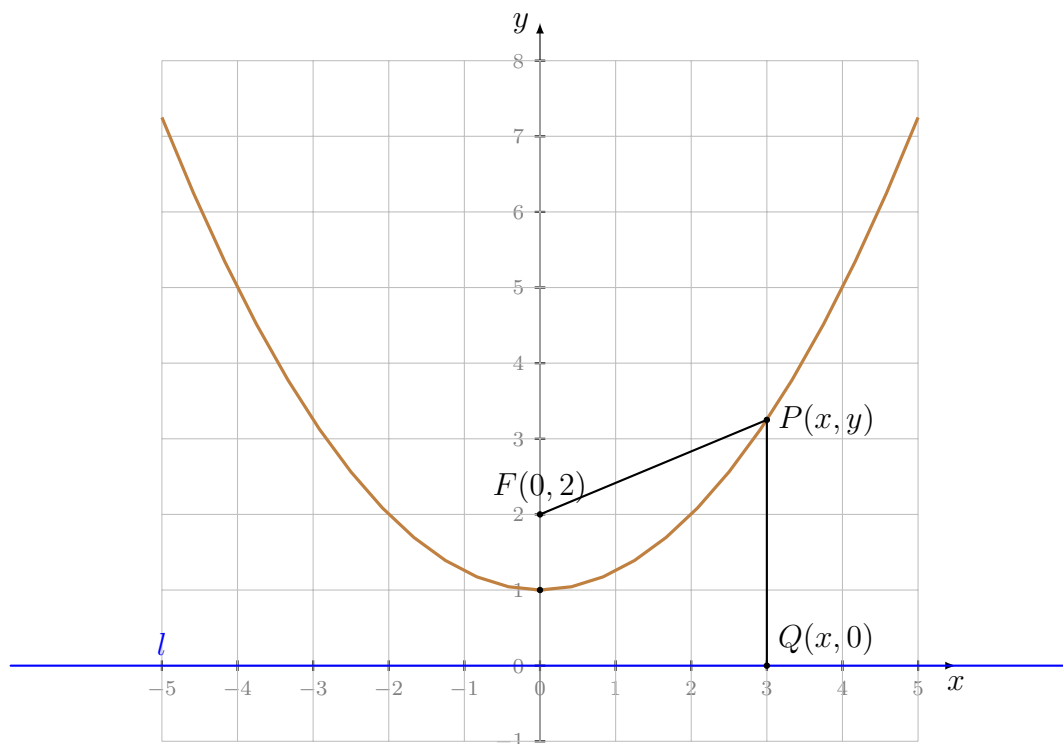


Grunnen til navnet brennpunkt er at all refleksjon vil samles der. En tredimensjonal parabel kalles en *parabol* og alle som har sett ei parabolantenne har kanskje fått med seg at mottakeren sitter akkurat i brennpunktet. Lurt, siden det betyr at alle signaler vil samles der. Det samme prinsippet benyttes også for å samle varme i brennpunktet.



Likninga

Vi kan se på et eksempel hvor vi finner likninga for en parabel. I funksjonslære kjenner vi parabelen som grafen til en andregrads polynomfunksjon. Vi skal se at likninga for parabelen som et geometrisk sted likner på den vi kjenner. La oss ta utgangspunkt i at vi kjenner brennpunktet og styrelinja.



Brennpunktet F har koordinatene $(0, 2)$ og styrelinja er x-aksen. P er et tilfeldig punkt på parabelen. Kan vi finne ei likning for denne parabelen?

Fra definisjonen av en parabel vet vi at uansett hvor punktet P ligger vil

$$|FP| = |PQ|$$

Det gir oss

$$|PQ| = y$$

$$|FP| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$$

Punktet $P(x, y)$ er på parabelen dersom disse to avstandene er like, altså:

$$|PQ| = |FP|$$

$$y = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$

$$y^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

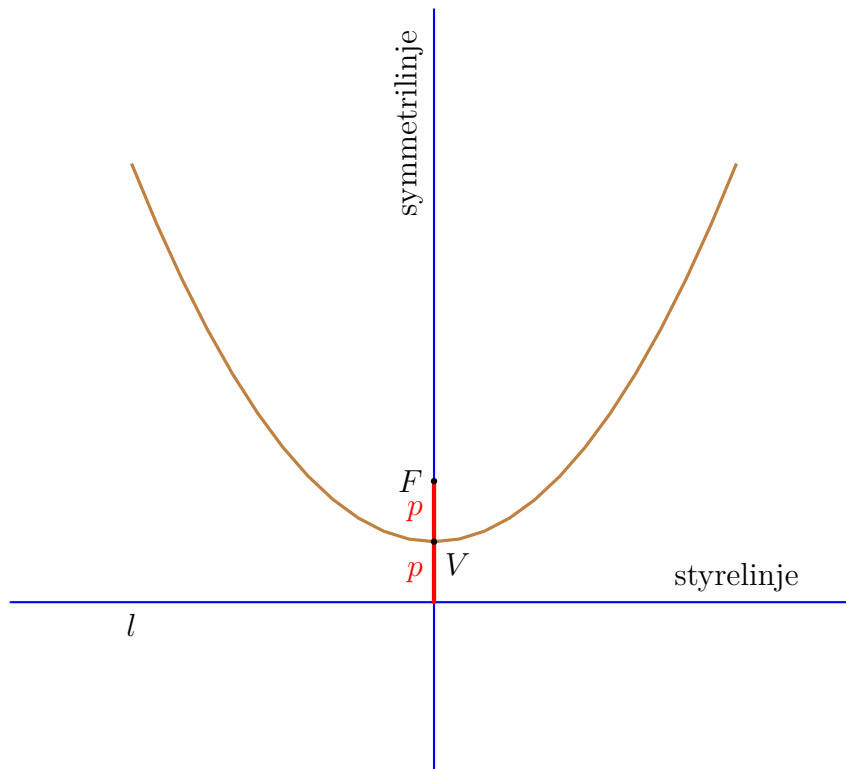
$$y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$4y = x^2 + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Likninga for parabelen blir $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Det er kanskje ikke så overraskende ut fra det vi vet om andregradsfunksjoner?

Vi kan finne den generelle likninga for en parabel på samme måte. For å finne det som kalles en standardform tar vi utgangspunkt i topp- eller bunnpunktet til parabelen. Vi kaller det punktet V etter det engelske *vertex*.



Avstanden fra styrelinja til V , og fra V til brennpunktet F gir vi navnet p . At de er like store følger av definisjonen av en parabel. Da kan vi skrive standardformen for likninga.

Standardform for parabelen

Likninga for en parabel med topp- eller bunnpunkt i (x_0, y_0) og symmetrilinje parallell med y-aksen kan skrives som

$$y - y_0 = k(x - x_0)^2$$

hvor $k = \frac{1}{4p}$. Parabelen har åpningen oppover hvis $p > 0$

Likninga for en parabel med topp- eller bunnpunkt i (x_0, y_0) og symmetrilinje parallell med x-aksen vil ha likninga

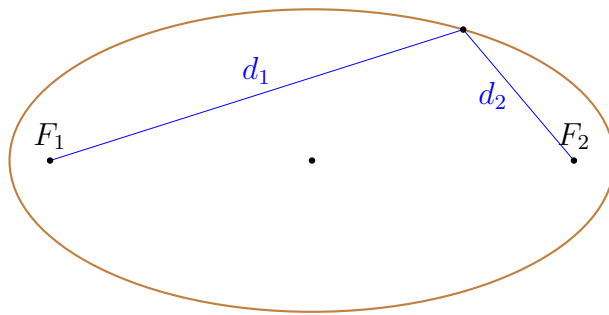
$$x - x_0 = k(y - y_0)^2$$

Parabelen har åpning mot høyre hvis $p > 0$ og åpningen mot venstre hvis $p < 0$

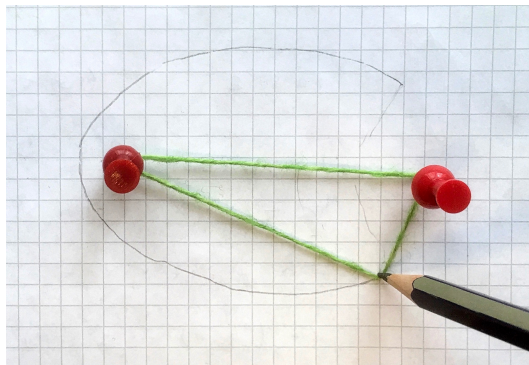
8.3 Ellipsen

Definisjon 14 Ellipsen

En ellipse er det geometriske stedet for de punktene som er slik at summen av avstandene til to faste punkter, F_1 og F_2 er konstant.



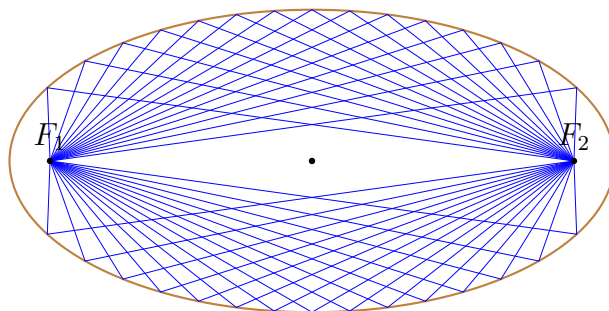
Definisjonen forteller at summen av avstandene d_1 og d_2 alltid vil være konstant. Det gjør at vi enkelt kan tegne en ellipse ved bruk av en hyssing, to knappenåler og en blyant, slik figur 8.1 viser.



Figur 8.1: tegning av ellipse

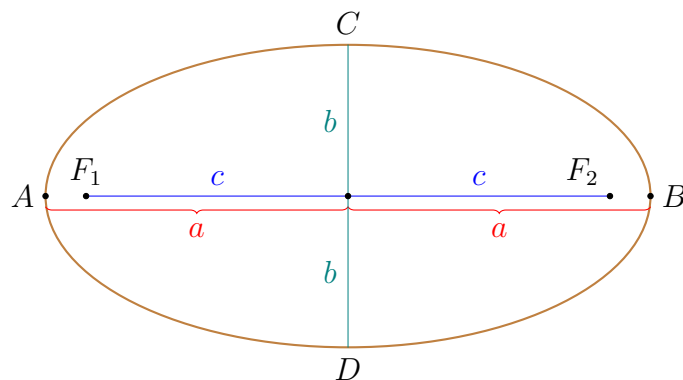
De to knappenålene danner brennpunktene i ellipsen og da kan vil blyantstreken gi alle punktene som er slik at summen av avstandene til brennpunktene er konstant.

Brennpunktene er de to faste punktene hyssingen er festet i. At de kalles brennpunkter skyldes nok at refleksjonsegenskapene i en ellipse. Sender vi noe i rett bane fra det ene brennpunktet vil det ende opp i det andre.



Aksene

Ellipsen har en bredde og en høyde som vi kaller akser



Linjestykket AB går gjennom brennpunktene og vi kaller AB for *den store aksen* til ellipsen. Linjestykket CD er en del av midtnormalen til AB og punktene C og D er skjæringspunktene mellom midtnormalen og ellipsen. Vi kaller CD for *den lille aksen*. Begge aksene danner symmetriakser for ellipsen. Skjæringspunktet mellom aksene kaller vi *sentrum* i ellipsen. Det følger at sentrum ligger midt mellom de to brennpunktene. Kaller vi avstanden fra A til sentrum for a og avstanden fra sentrum til C for b , har vi at

- den store aksen: $2a$
- den lille aksen: $2b$
- den store halvaksen: a
- den lille halvaksen: b

Vi vet at summen av avstandene fra et punkt på ellipsen og til brennpunktene er konstant. Tenk på hvordan vi kan tegne en ellipse. Vi kaller denne avstanden for r . Ser vi nærmere på punktet A får vi at

$$r = AF_1 + AF_2$$

Da ellipsen er symmetrisk vet vi at $AF_1 = F_2B$ og vi har at

$$r = AF_1 + AF_2 = F_2B + AF_2 = AB = 2a$$

Det betyr at summen av avstandene fra et punkt på ellipsen til brennpunktene er lik lengden av den store aksen.

Vi tar utgangspunkt i figur 8.2 hvor C og D er endepunktene til den lille aksen. CD ligger langs midtnormalen til brennpunktene. Da har vi at $CF_1 = CF_2$. Summen av avstandene er $CF_1 + CF_2 = 2a$ og vi har at $CF_1 = CF_2 = a$. S er sentrum i ellipsen og $\triangle SF_1C$ er rettvinkla. Benytter vi setningen til Pytagoras har vi at

$$\begin{aligned} SC^2 + SF_1^2 &= CF_1^2 \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

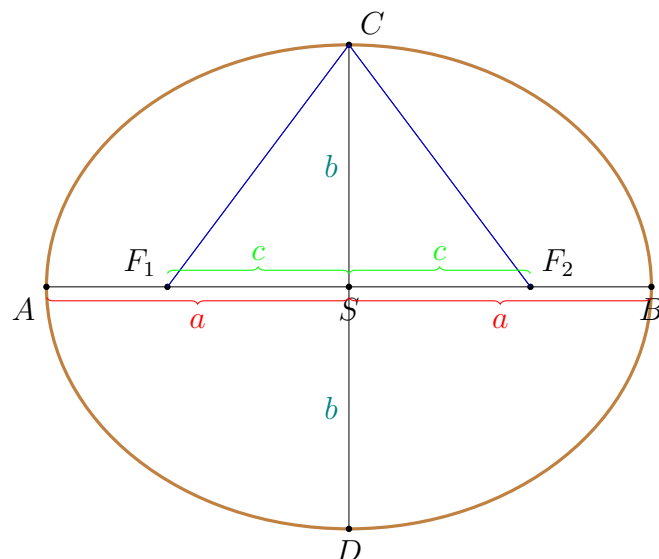
Eksentrisiteten

Eksentrisiteten forteller noe om hvor utstrakt ellipsen er

$$e = \frac{c}{a}$$

hvor $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (avstanden fra et brennpunkt til sentrum).

Eksentrisiteten er alltid: $0 < e < 1$.



Figur 8.2: Viktige egenskaper

Likninga for en ellipse

Ut fra definisjonen kan vi komme fram til hvordan vi kan skrive likninga for en ellipse på det som kalles en standardform.

Standardform for ellipse

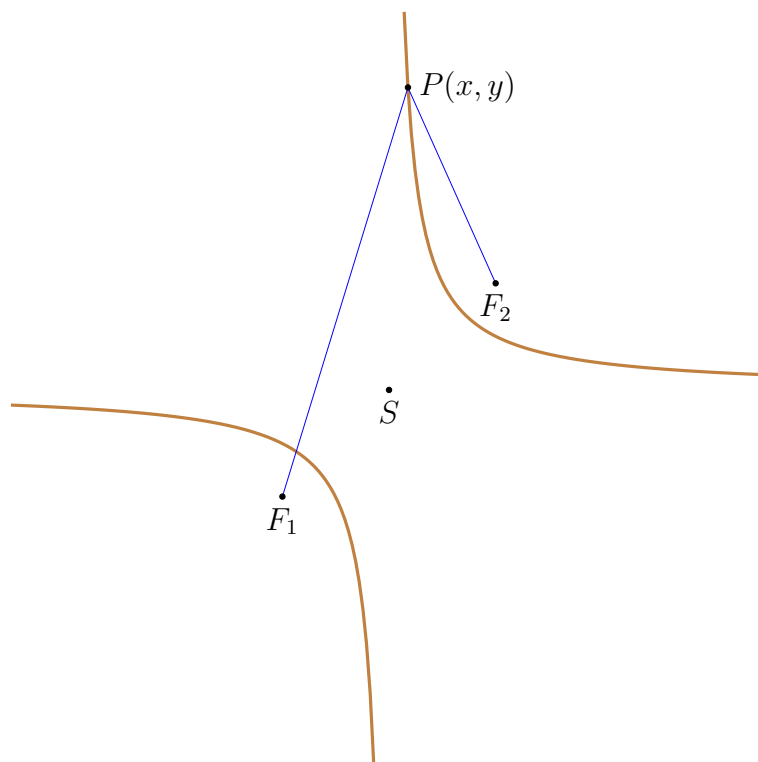
Likninga for en ellipse med sentrum i (x_0, y_0) og den store aksen parallell med x-aksen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

8.4 Hyperbelen

Definisjon 15 Hyperbelen

En hyperbel er det geometriske stedet for de punktene som er slik at differansen mellom avstandene til to faste punkter er konstant.



Uansett hvor punktet P er på hyperbelen har vi at

$$|PF_1| - |PF_2| = \text{konstant}$$

Likninga for en hyperbel

Ut fra definisjonen av en hyperbel og litt regning kan vi komme fram til likninger for hyperbler. Setter vi den opp på det som kalles standardform får vi dette resultatet

Standardform likninga til en hyperbel

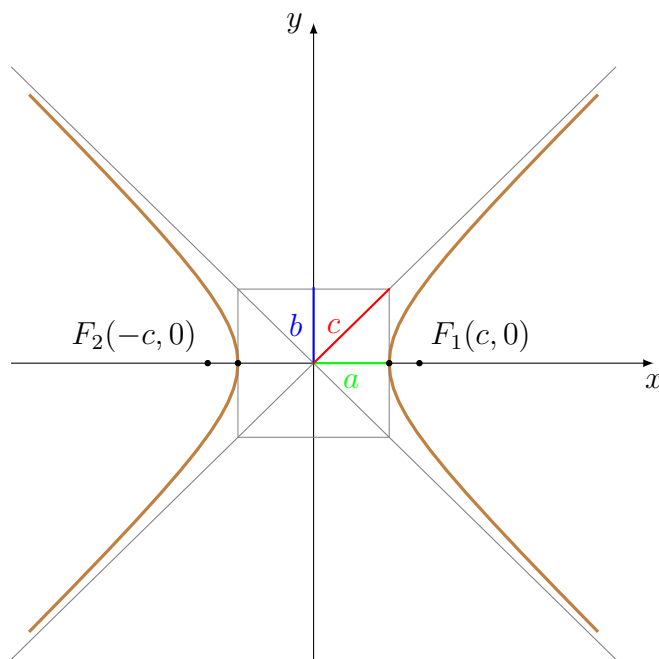
Likninga på standardform for en hyperbel med sentrum i (x_0, y_0)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

Det er fortegnet foran ettallet som bestemmer hvordan hyperbelen er orientert. Hyperbelen kan både ha åpninger mot x- eller y-aksen. Ser vi på hyperbler med sentrum i origo vil en hyperbel med likninga er

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ha en orientering som den vi ser under.



På figuren er a avstanden fra origo til punktene som ligger nærmest origo. De punktene, vi bruker ofte V for vertex, har koordinatene

$$V_1 : (a, 0) \quad V_2 : (-a, 0)$$

Avstanden fra origo til brennpunktene har fått navnet c . Brennpunktene har da koordinatene

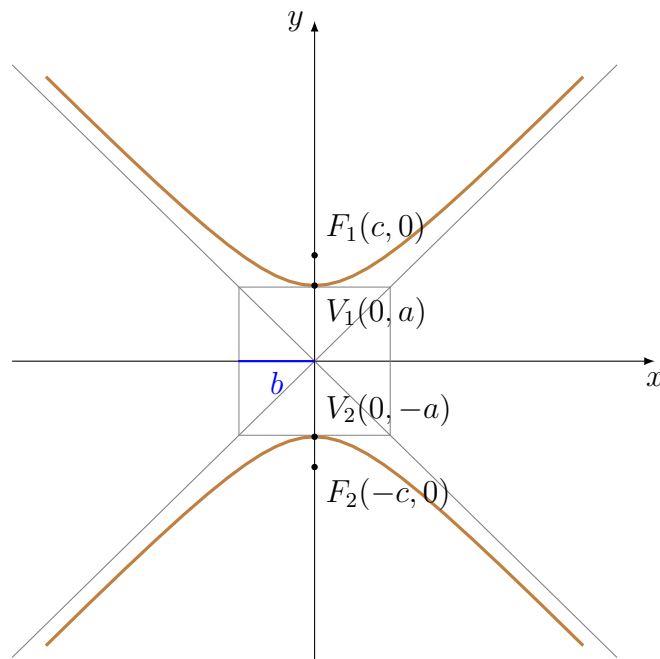
$$F_1 : (c, 0) \quad F_2 : (-c, 0)$$

Sammenhengen mellom avstandene kan uttrykkes som $a^2 + b^2 = c^2$. For å vite hva b står for må vi først innom asymptotene. Asymptotene er tegnet inn på figuren og kan betraktes som linjer hyperbelen nærmer seg. Tegner vi opp et rektangel hvor hvert hjørne ligger på asymptotene, og to av sidene tangerer punktene V_1 og V_2 , vil vi ha b som avstanden fra origo og opp til den andre siden i rektanglet. Se figuren.

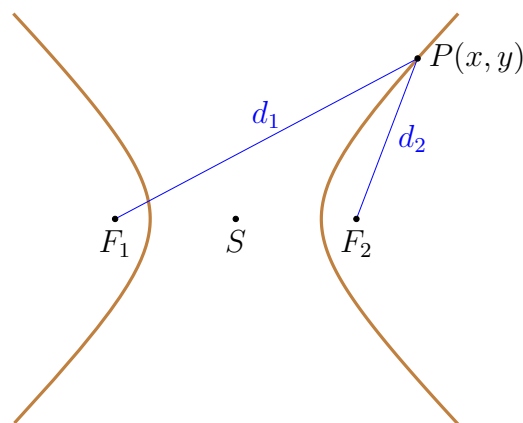
En liten forandring på fortegnet slik at hyperbelen har likninga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gjør at vi snur om på det meste. Da vil det se sånn ut.



Den konstante forskjellen mellom avstandene vi så på i starten kan vi nå si noe mer om. Gir vi navnet d_1 og d_2 til avstandene fra brennpunktene kan vi tegne denne figuren.



Ut fra avstandene a og c og litt regning kan vi se at

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

Asymptotene vil ha likningene

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

Praktisk bruk av hyperbelen

Hyperbelen som et geometrisk sted utnyttet på mange måter. Differensen mellom avstander kan utnyttet i navigasjonssystemer og mye annet. Et eksempel på en enkel metoden fra første verdenskrig er hvordan hyperbelen ble utnyttet for å finne posisjonen til kanoner. Tre personer med hver sin synkroniserte klokke ble plassert ut i terrenget. Hvis alle kunne høre kanonsmellet var det mulig å finne posisjonen ut fra tidspunktene. Forskjellene mellom avstandene kunne benyttes til å bestemme to hyperbler. Skjæringspunktet mellom hyperblene ga posisjonen.