

Funksjoner

Per G. Østerlie

27. februar 2018

I	Introduksjon	3
1	Hva er en funksjon?	5
1.1	Hva er en funksjon?	5
1.2	Hvordan skriver vi funksjonsuttrykk?	6
1.3	Funksjoner kan framstilles på flere måter	8
1.4	Overganger mellom representasjonene	10
1.5	To eksempler på funksjoner	12
1.5.1	Figurtall	12
1.5.2	Kanon	13
1.6	Funksjoner i lærebøkene	15
1.7	En moderne definisjon av en funksjon	16
1.8	Andre definisjoner	18
1.9	Typer av entydige funksjoner	18
1.10	Noen sammenhenger er ikke funksjoner	20
1.11	Den inverse funksjonen	21
II	Noen typer funksjoner	23
2	Polynomfunksjoner	24
2.1	Hva er en polynomfunksjon?	24
2.2	Førstegradsfunksjoner	24
2.3	Andregradsfunksjoner	26
2.4	Polynomfunksjoner av høyere grad	29
3	Rasjonale funksjoner	31
3.1	Hva er en rasjonal funksjon?	31
3.2	Grafen til rasjonale funksjoner	31
3.2.1	Hyperbler	31
3.2.2	Asymptoter	32
3.3	Noen typiske oppgaver	37
3.4	Hva er en grenseverdi?	43
4	Potensfunksjoner	46
4.1	Potensfunksjoner	46

4.2	Grafen til potensfunksjonen	46
4.3	Noen eksempler og oppgave	48
4.3.1	Allometri	49
5	Ekspontialfunksjoner	51
5.1	Et eksempel på eksponentiell vekst	51
5.2	En definisjon av eksponentialfunksjoner	52
5.3	Grafen til $f(x) = a \cdot b^x$	53
5.4	Noen oppgaver	54
5.4.1	Gjeddepopulasjonen i Svartvannet	54
5.4.2	Flere oppgaver	55
6	Funksjoner med delt forskrift	57
6.1	Bankrenter	57
6.2	Et eksempel til	58
6.3	Absoluttverdifunksjonen	58
7	Kontinuitet	60
7.1	Ensidige grenseverdier	60
7.2	Kontinuitet	61
7.3	Noen eksempler	61



Denne teksten kan inneholde både mangler og feil. Si fra hvis du oppdager noe som burde vært korrigert. Legg merke til datoen den er skrevet.

Del I

Introduksjon

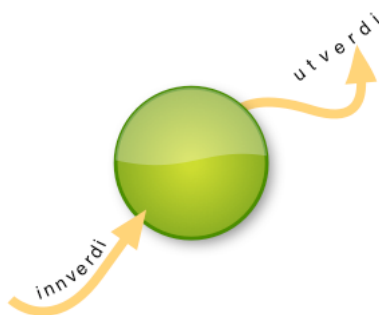
Funksjoner kan fortelle oss noe om sammenhenger.

Ofte ønsker vi svar på hva som skjer hvis noe forandres. Hvor høgt står sola på himmelen ved et gitt klokkeslett? Hvordan forandres temperaturen i en termos med tiden? Hva skjer med pengesummen jeg setter i banken? Hvilket mobiltelefonabonnement bør jeg velge? Hvordan kan jeg produsere et produkt billigst? Funksjoner kan hjelpe oss med å finne svaret på slike spørsmål.

1 Hva er en funksjon?

1.1 Hva er en funksjon?

Spørsmålet krever nok en definisjon. Den kommer vi til, men før spørsmålet besvares skal vi se på en del beskrivelser som passer bedre for bruk til elever. Etter det skal vi prøve å utforme en mer presis matematisk definisjon. Som en start skal vi betrakte en funksjon som en sammenheng mellom en innverdi og en utverdi.

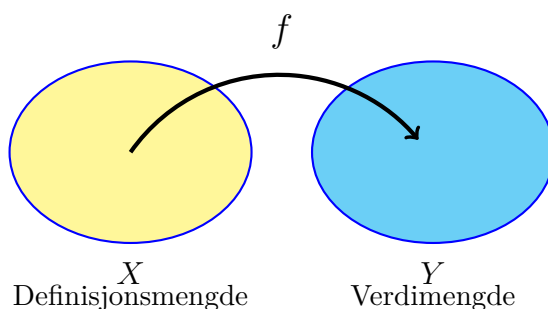


Figur 1.1: Sammenhengen mellom en innverdi og en utverdi

I matematikkbøker benyttes ofte en metafor om funksjonsmaskinen for å forklare sammenhengen: Vi sender en innverdi inn i maskinen og ut kommer en utverdi. Det betyr at vet vi en innverdi kan vi finne utverdien. Utverdien avhenger derfor av innverdien. For at en sammenheng skal kunne kalles en funksjon stiller vi også krav om at det bare hører en utverdi til en innverdi.

Innverdi kalles ofte argumentverdi og utverdi funksjonsverdi.

Alle verdiene innverdien kan ha kalles for definisjonsmengden til funksjonen. Verdimengden inneholder alle verdiene utverdien kan ha. Da vil funksjonen være den entydige avbildingen fra definisjonsmengden til verdimengden. Til ett element i definisjonsmengden hører det ett, og bare ett, element i verdimengden. Kaller vi de to mengdene for X og Y kan funksjonen framstilles slik



Figur 1.2: Funksjon som en avbilding

1.2 Hvordan skriver vi funksjonsuttrykk?

Ta utgangspunkt i figur 1.2 hvor vi tenker oss alle x-verdiene som en mengde, X , og alle y-verdiene som en annen mengde, Y . Da kan vi skrive funksjonen som

$$f : X \longrightarrow Y$$

eller i noen tilfeller benyttes også ei litt mer kurva pil: $f : X \curvearrowright Y$. Denne syntaksen viser at funksjonen f er en avbilding ¹ fra en mengde til en annen og vi får også med oss hvilke mengder. En annen skrivemåte som er ment å vise det samme er denne:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Disse skrivemåtene er kanskje uvant for den som leser norske matematikkbøker beregna for skolen, men skrivemåtene illustrerer funksjonen som en avbildning på en fin måte. Vender vi tilbake til vanlige skrivemåter i skolematematikken er det to skrivemåter som går igjen. Ofte skiller en de to mellom ungdomstrinnet og videregående skole. Det er bruken av $y = \dots$ og $f(x) = \dots$. La oss se mer på det og diskutere symbolbruken.

Vi starter med å se på en enkel funksjon er funksjonen som tar en innverdi og legger til tre. I mange matematikkbøker er det vanlig å presentere denne funksjoner slik:

$$y = x + 3$$

En slik skrivemåte kan kritiseres for å ikke få fram at y er en funksjon av x . Det at x er en uavhengig variabel og y er en avhengig variabel kommer ikke

¹På engelsk benyttes "maps to". På norsk benyttes både mappes, tilordnes, kartlegges med flere.

fram. Et annet ankepunkt finner vi hvis vi har flere funksjoner. Er alle skrevet på formen $y = \dots$ kan det være vanskelig å skille dem. Vi vil ha behov for å skille flere funksjoner fra hverandre. Det gjør vi ved å gi dem forskjellige navn. En av de første aktivitetene som møter elever er å lage verditabeller etter å ha fått et funksjonsuttrykk. En typisk tabell viser innverdi, begregning og utverdi.

x		y
innverdi	utregning	utverdi
-1	-1+3	2
0	0+3	3
2	2+3	5
1001	1001+3	1004

Kolonnen innverdi betegnes ofte, x og utverdikolonnen, y . Kanskje er det også behov for å kunne skrive utverdien på en enkel måte uten å måtte finne den? Det er noen av grunnene til å benytte en annen skrivemåte. Et mye brukt navn på en funksjon er f . Variabelen vi benytter som innverdi kaller vi ofte x . Da skriver vi funksjonen som $f(x)$. Det leser vi som «f av x». Legg merke til at både navnet på funksjonen og variabelnavnet til innverdien er definert. Det kommer også klart fram at det er en funksjon og ikke en formel. I vårt tilfelle kan funksjonsuttrykket skrives som

$$f(x) = x + 3$$

Vi kan også si at variabelen y er en funksjon av x ved å skrive

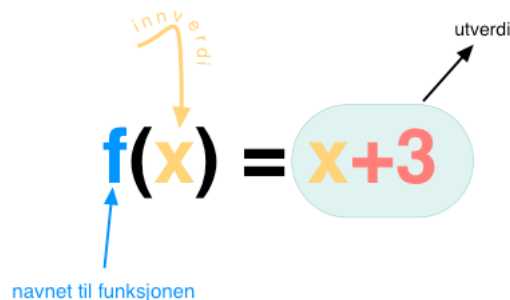
$$y = f(x) = x + 3$$

Denne skrivemåten presiserer at

- funksjonsnavnet er f
- variabelnavnet er x
- at det er en funksjon

Nå kan vi også gi andre navn til funksjonene slik denne tabellen viser noen eksempler på:

navn	leses som	eksempel på uttrykk
$g(x)$	«g av x»	$g(x) = x^2 + 2$
$p(k)$	«p av k»	$p(k) = 2k + 3$
$A(r)$	«a av r»	$A(r) = \pi r^2$



Figur 1.3: Oppsummering

Det er ikke noe i veien for å benytte flere bokstaver sjøl om det ikke har vært så vanlig. Bruk av digitale verktøy gjør det både mulig og kanskje mer vanlig enn tidligere? Ser vi på et eksempel hvor vi måler vekten av en hundevalp hver dag etter at vi har fått den. Ut fra verdiene finner vi en funksjon. Da kan vi gjerne kalle funksjonen for **valpevekt** og benytte variabelen **dag** som innverdi slik at funksjonen kan skrives som $valpevekt(dag)$.

1.3 Funksjoner kan framstilles på flere måter

Vi kan ikke peke på en funksjon og si at dette er en funksjon. Funksjoner er en abstrakte sammenhengen mellom størrelsene. En slik sammenheng kan vi framstille på flere måter. Hver av dem kan kalles en representasjon av en funksjon. Her er de mest vanlige i skolematematikken.

Algebraiske uttrykk er kanskje den mest vanlige representasjonen av en funksjon. Her er noen eksempler fra matematikkboka

$$g(x) = x^2 + 2x$$

$$h(x) = x + 4$$

Funksjonen g framstilt ved det algebraiske uttrykket $x^2 + 2x$, mens h er framstilt som $x + 4$. De algebraiske uttrykkene kalles funksjonsuttrykk.

Elever er vant til at alle funksjoner er definert ved et algebraisk uttrykk, men det er ikke alltid tilfelle. Tenk bare lønnstabellen som gir sammenhengen mellom stilling, ansiennitet og lønn. Det er en entydig sammenheng uten et

algebraisk uttrykk. Andre eksempler er funksjoner som gulv- og takfunksjonene (eng. floor og ceiling). Gulvfunksjonen, som Gauss² skrev som $[x]$, har som funksjonsverdi heltallsdelen av tallet. Da er $[2] = 2$, $[2.3] = 2$, $[2.9] = 2$ og $[-2.3] = -3$. Takfunksjonen gir nærmeste heltall andre veien.

Grafer er også en vanlig representasjon av en funksjon. Funksjonen g er framstilt grafisk i figur 1.4a.

Krav til definisjonsmengden kan gjøre det vanskelig å framstille funksjonen som en kontinuerlig graf. Skal vi tegne grafen til $h(x) = x^2$ og definisjonsmengden er de hele tallene, $\mathbb{Z}$, vil grafen til funksjonen bestå av bare punkter, slik figur 1.4b viser.

Tabeller er også en vanlig måte å representere funksjoner. Punktene som er tegnet i koordinatsystemet i figur 1.4b kan også skrives på tabellform.

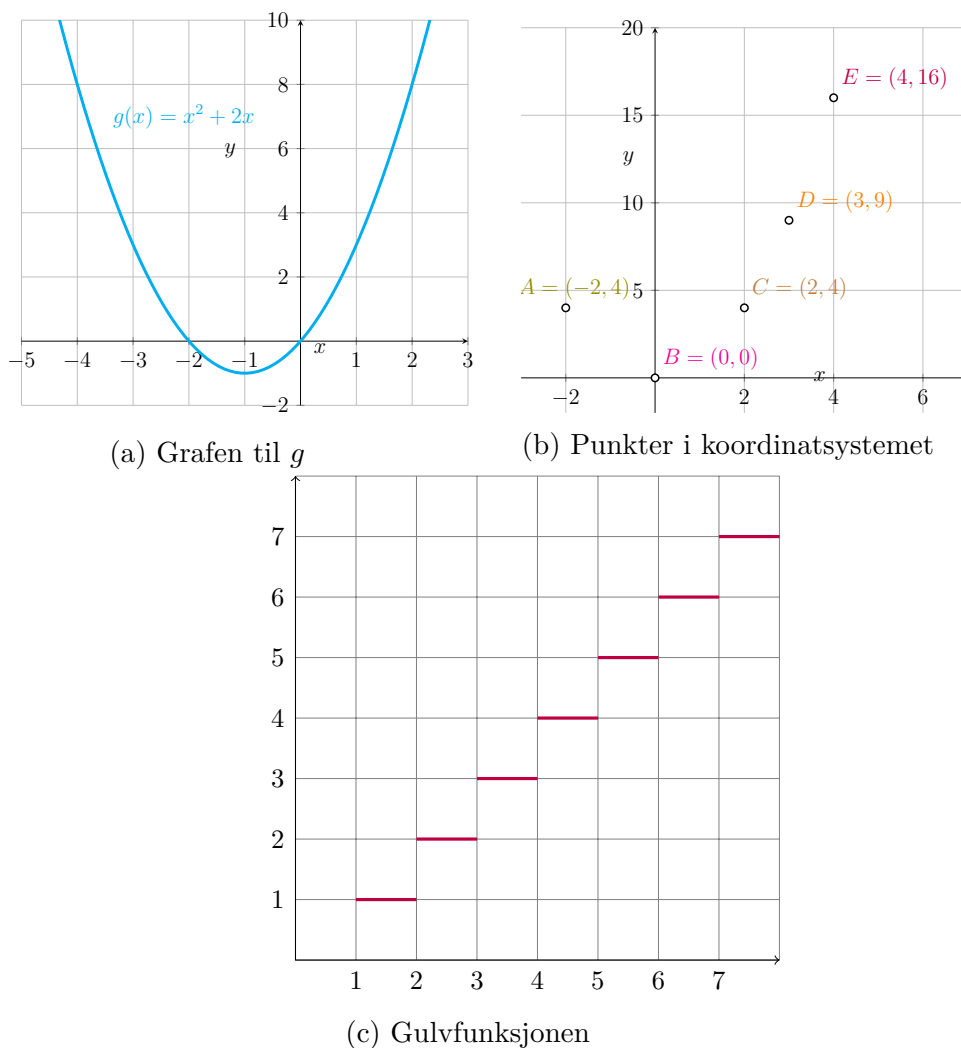
x -verdier	-2	0	2	3	4
y -verdier	4	0	4	9	16

Tabellen kjenner du sikkert igjen. Den bruker vi som utgangspunkt når vi skal tegne grafen til en funksjon for hånd.

En avbildning mellom mengder er en representasjon vi benyttet i starten av kapitlet (se figur 1.2). Mer detaljert kan vi tegne definisjonsmengden og verdimengden som områder slik du ser det i figur 1.5. I figuren er det tegnet inn verdier som elementer i begge mengdene. Strekene mellom verdiene viser hvilke som ”hørersammen”.

Beskrivelser med ord kan også representere en sammenheng mellom to verdier. Tenk bare på sammenhengen mellom prisen på en bussbillett og alder. Setningen: «ta en verdi og legg til tre» kan også være en måte å framstille en funksjon på.

²Carl Friedrich Gauss (1777–1855) var en berømt tysk matematiker fra Hanover

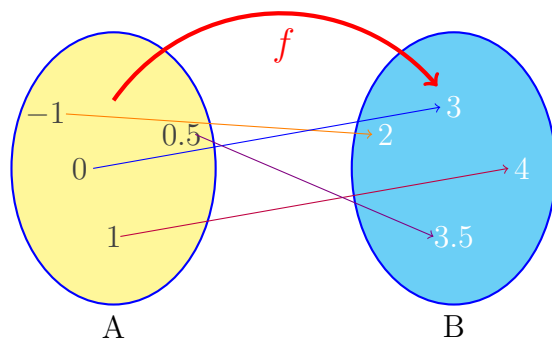


Figur 1.4: Grafer i koordinatsystemet

1.4 Overganger mellom representasjonene

En god forståelse av hva en funksjon er krever mange representasjoner. Relasjonene må også kunne settes i en sammenheng og eleven må kunne gå fra den ene til den andre. Janviertabellen er en tabell oppkalt etter den kanadiske matematikkdiraktikeren Claude Janvier (1987). Han satte opp de mest vanlige representasjonene i en tabell og fikk cellene viser overgangene mellom representasjonene.

En klassiker er å få gitt et funksjonsuttrykk, så sette opp en tabell for noen



Figur 1.5: Funksjon som en avbilding mellom mengder

verdier og til slutt plotte punktene i et koordinatsystem. I tabellen finner vi at disse overgangene blir gjort. Først fra et uttrykk til en tabell: *utregning*. Så fra en tabell til et koordinatsystem: *plotting*.

Det å ha en relasjonell forståelse (Skemp, 1976) for funksjoner vil si å kjenne alle representasjonene i tabellen og overgangene mellom dem. Undervisningen må derfor sørge for at elevene blir kjent med det. Janviertabellen kan derfor fungere som ei sjekkliste for hva som bør berøres av i undervisningen.

		til			
Janviertabellen		Situasjoner, verbal beskrivelse	Tabeller	Grafer	Uttrykk
		Situasjoner, verbal beskrivelse	Måling	Skissering	Modellering
		Tabeller	Tolking av tabell	Plotting	Tilpassing
		Grafer	Tolking av graf	Avlesing	Kurve-tilpassing
		Uttrykk	Parameter-gjennkjenning	Utregning	Skissering
fra					

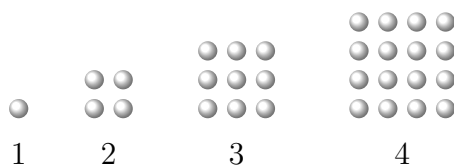
Figur 1.6: Janviertabellen

1.5 To eksempler på funksjoner

Her kommer to eksempler som er ment å både vise en praktisk tilnærming til funksjoner og gi gode eksempler på definisjons- og verdimengde.

1.5.1 Figurtall

Noe av grunnen til at figurtall har vunnet plass innafor algebra er at de er direkte observerbare og at algebraiske uttrykk for antall kan kontrolleres. Antall elementer i et figurtall avhenger av figurtallnummeret og kan derfor framstilles som en funksjon. Figur 1.7 viser kvadrattallene.



Figur 1.7: Kvadrattall

Antall prikker når vi vet figurnummeret kan vi finne ut fra dette funksjonsuttrykket:

$$a(n) = n^2$$

Her er

- n er figurnummer
- a er navnet til funksjonen
- $a(n)$ antall prikker i figur n

Nå skal vi se på hvilke begrensninger vi må sette for n . Siden n er figurnummer må n være et heltall større enn null. Tidligere har vi kalt det for naturlige tall. Da kan vi skrive at

$$n \in \mathbb{N}$$

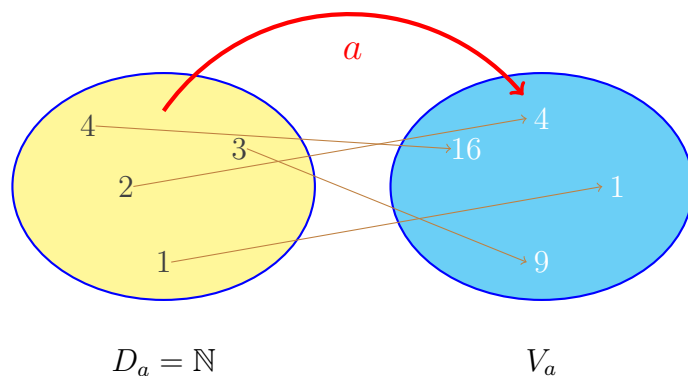
Mengden som n tilhører er definisjonsmengden til funksjonen. Nå heter funksjonen vår a og «definisjonsmengden til a er alle naturlige tall» som vi kan skrive slik

$$D_a = \mathbb{N}$$

Verdimengden er mengden av alle utverdiene. I dette tilfellet er det ikke så enkelt å skrive den kort, men her er et forsøk:

$$V_a = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

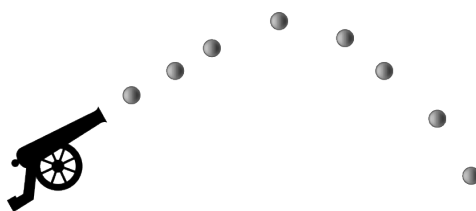
Mengder tegner vi ofte som areal og gjør vi det ender vi opp med en figur som denne.



Figur 1.8: Definisjons- og verdimengde

1.5.2 Kanon

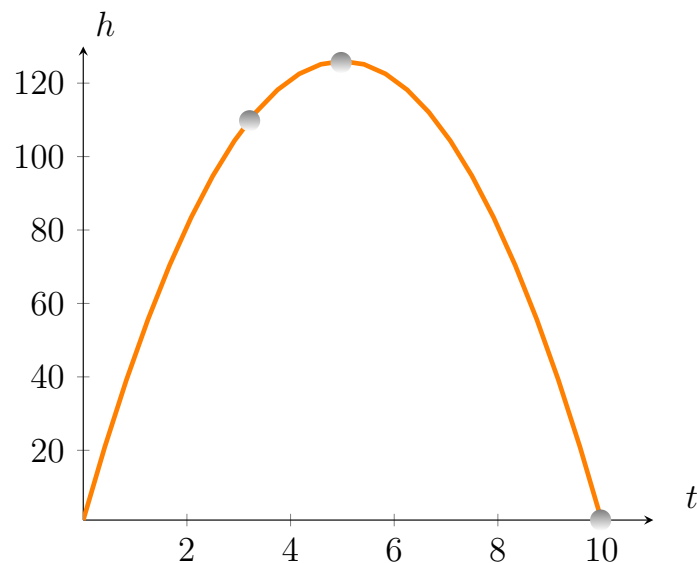
Kanonskudd, steikast, fotballspark eller liknende kan også være eksempler for å diskutere funksjoner, definisjons- og verdimengder. La oss se på dette eksemplet med kanonskudd.



En kanon skyter ut ei kule. Etter å gjentatte målinger har noen matematikere kommet fram til at vi kan finne høyde på kula etter t sekunder hvis vi benytter denne funksjonen:

$$h(t) = -5t^2 + 50t + 1$$

Her er en graf som viser høyden etter t sekunder. Her er kula illustrert etter litt over tre sekunder.



Figur 1.9: Kanonskudd

Ved hjelp av funksjonen kan vi finne ut at det høyeste kula når er 126 m. Kan du se det ut fra grafen? Det skjer etter 5 sekunder. Vi kan skrive:

$$h(5) = 126$$

Når vi sier at kula starter 0 m over bakken kan vi skrive alle høydene som et intervall.

$$[0, 126]$$

Dette intervallet kaller vi verdimengden til funksjonen h og det skriver vi slik:

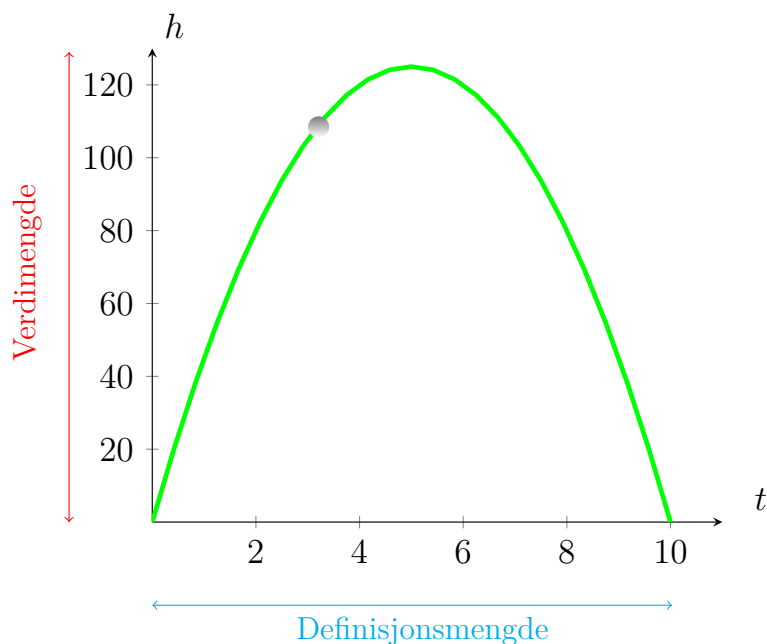
$$V_h = [0, 126]$$

Hva nå med definisjonsmengden til h ? Definisjonsmengden var alle verdiene innverdien kunne ha. Spørsmålet blir da hva t kan være. Her blir svaret at t kan være alt fra 0 til 10.02. 0 fordi dette dreier seg om tid og da må t være positiv. Grunnen til 10.02 er den høyeste verdien er at etter 10.2 sekunder lander kula på bakken igjen. Definisjonsmengden blir da:

$$D_h = [0, 10.02]$$

Ser vi på grafen kan vi markere definisjons- og verdimengden slik:

En utfordring med oppgaver lik denne er at elever ofte oppfatter grafen som kulebanen slik at x-aksen oppfattes som lengde og ikke tid.



Figur 1.10: Definisjons- og verdimengde i koordinatsystemet

1.6 Funksjoner i lærebøkene

Så langt har vi sett på funksjonen som en sammenheng mellom innverdi og utverdi hvor det til hver innverdi hører én, og bare én, utverdi. Hvordan defineres funksjoner i lærebøkene. Vi kan se på noen eksempler

I *Tetra 9* presenterer de en funksjonsmaskin før de skriver

Funksjonen forandrer et tall x til et nytt tall y . Denne forandringen følger en bestemt sammenheng. Hver verdi av x gir kun én verdi av y . En slik sammenheng kaller vi en **funksjon**

Mega 10B definerer funksjoner på denne måten

Når det til enhver verdi av en størrelse svarer en bestemt verdi av en annen størrelse, kaller vi denne sammenhengen for en **funksjon**.

I boka *Matematikk 9* finner vi denne definisjonen

Når et tall er avhengig av et annet på en entydig bestemt måte, kaller vi sammenhengen mellom dem en funksjon. Hvis funksjonen er gitt ved et regneuttrykk, kaller vi dette en formel eller et

funksjonsuttrykk.

Her er det viktig å legge merke til to egenskaper ved funksjoner

- entydighet
- vilkårlighet

Entydigheten kommer fram ved at bare kan være en sammenheng mellom hvert element i definisjonsmengden og ett eneste element i verdimengden. Det betyr at $f(x_1)$ bare kan være lik y_1 og ingen andre verdier. Et slik valg er lagt inn i definisjonen av praktiske grunner. Uten denne entydigheten oppstår det vansker i det vi benytter funksjoner til.

Vilkårlighet må ikke tolkes i retning «tilfeldighet», men sier at hvilken som helst sammenheng kan være en funksjon. Sjøl om vi er vant til å ha gitt et funksjonsuttrykk, trenger ikke det alltid å være tilfelle.

Definisjonene over tilfredstiller disse kravene.

1.7 En moderne definisjon av en funksjon

Til slutt skal vi ta med en moderne definisjon av en funksjon for å vise at et funksjonsuttrykk ikke er med i definisjonen. Da starter vi med å definere en relasjon mellom to mengder. En relasjon mellom to mengder kan vi beskrive som en sammenheng og ikke stille noen krav til denne sammenhengen

En binær³ relasjon mellom to mengder A og B er en delmengde⁴ R av $A \times B$. Her er $A \times B$ det kartesiske produktet definert som

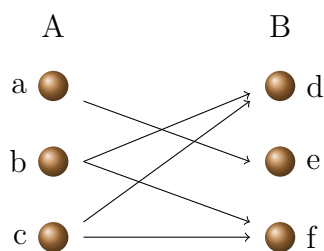
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Det kartesiske produkt mellom to mengder inneholder alle kombinasjoner av elementene, dvs. at mengden $A \times B$ inneholder alle ordna par av (x, y) . Grafisk kan en relasjon framstilles som i figur 1.11. Det kartesiske produktet mellom A og B vil være alle kombinasjoner av alle elementene i mengdene. Relasjonen som figuren viser et eksempel på er en delmengde av $A \times B$. Kulene representerer elementer i hver av mengdene og pilene viser hvilke par som hører sammen. Av figuren kan vi da se disse ordna parene:

$$(a, e), (b, d), (b, f), (c, d) \text{ og } (c, f)$$

³binær: gjelder to størrelser

⁴kan leses som «en del av»



Figur 1.11: En relasjon mellom to mengder

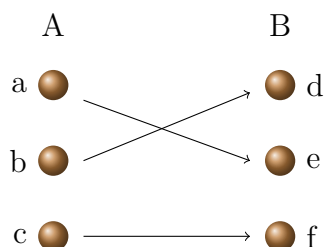
Legg merke til at det ikke stilles krav til entydighet til en relasjon. Det blir gjort til en funksjon som kan defineres slik.

Definisjon 1

En funksjon fra en mengde A til en mengde B er en relasjon F som tilfredsstiller to betingelser.

1. For alle $x \in A$, eksisterer det $y \in B$ slik at $(x, y) \in F$
2. For alle $x \in A, y \in B, (x, y) \in F$ og $(x, z) \in F \implies y = z$

I denne definisjonen stilles det krav til entydighet. Tar vi utgangspunkt i relasjonen vi så på tidligere tilfredsstiller ikke den kravene til en funksjon. Figur 1.12 viser entydighet hvor det til hvert element i definisjonen er tilordnet ett og bare ett element i verdimengden.



Figur 1.12: Entydig relasjon

Som oftest benytter vi store bokstaver for å symbolisere relasjoner og små bokstaver på funksjoner. Er f en funksjon fra A til B vil hvert element $x \in A$ være med i ett, og bare ett, ordna par $(x, y) \in f$. Vi kan derfor skrive $y = f(x)$ når $x \in A$. En slik notasjon viser korrespondansen mellom elementene x og y . Skrivemåten $f : A \rightarrow B$ indikerer at f er en funksjon fra A til B . Vi kaller A for definisjonsmengden til funksjonen f , ofte betegnet som D_f . B kaller vi kodomenet eller verdimengde⁵. Mengden B inneholder alle mulige verdier

⁵Definisjonene av de to kan avvike, men det ligger utafor vår behandling

funksjonen kan gi, men er ikke begrenset til disse. Verdimengden, som ofte symboliseres med V_f , er alle verdiene funksjonen gir:

$$V_f = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ for en } x \in A\}$$

Når definisjonsmengden er diskret kaller vi funksjonen for en diskret funksjon. Entydighet: nødvendig når vi skal utføre handlinger med en funksjon, f.eks derivere.

Legg merke til at en moderne definisjon av funksjoner er basert på

- vilkårlighet
- entydighet

Vilkårlighet vil si at en hvilken som helst sammenheng mellom hvilke som helst mengder kan være en funksjon. Entydighet er, som vi har sett, kravet om at det til hvert element i definisjonsmengden skal det høre ett og bare ett element i verdimengden.

1.8 Andre definisjoner

Definisjonene kan variere. Her er noen andre definisjoner av funksjoner.

Matematikk i praksis (Gulliksen, Hashemi & Hole, 2015) definerer funksjoner slik

Definisjon 2

En **funksjon** f er definert fra en mengde A til en mengde B er en regel som til hvert element x i A gir oss et entydig bestemt element $f(x)$ i B . Man kaller $f(x)$ for *funksjonsverdien* til f i punktet x . Vi skriver $f : A \rightarrow B$. (Leses: f , som går fra A til B).

1.9 Typer av entydige funksjoner

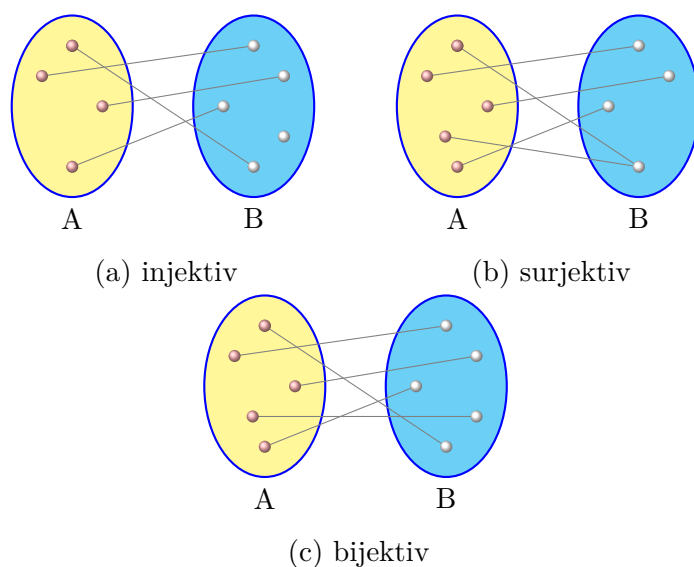
En funksjon kan være entydig på flere måter

Injektiv En funksjon er injektiv hvis det for ethvert element $y \in B$, finnes høyst ett element $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Det er forsøk illustrert i figur 1.13a

hvor kuler markerer elementene i mengdene. For hvert element i verdimengden finner vi høyst ett element i definisjonsmengden. Legg merke til at det ikke stilles krav om at det skal være ett element, bare høyst ett. Figuren viser derfor at ett element i B er «til overs». Slike funksjoner kalles også *en-til-en* eller *en-entydig*.

Surjektiv Funksjonen er surjektiv hvis det for ethvert element $y \in B$, finnes minst ett element $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Slike funksjoner kalles også *på*, eller på engelsk *onto*. Figur 1.13b viser hvordan alle elementene i verdimengden har en, eller flere, tilhørende verdier i definisjonsmengden. Ingen av elementene i verdimengden er «til overs»

Bijektiv Funksjonen er bijektiv hvis den er både injektiv og surjektiv, det vil si at det for ethvert element $y \in B$ finnes nøyaktig ett element $x \in A$ slik at $f(x) = y$.



Figur 1.13: Typer funksjoner

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto 2 - x$$

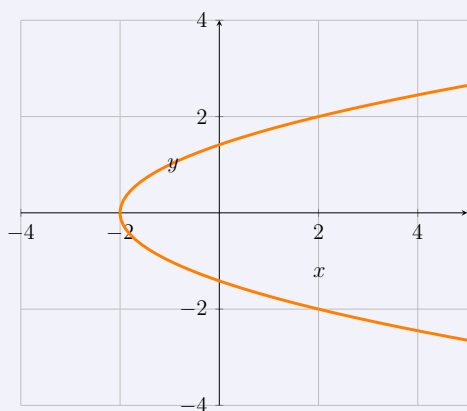
- f er en funksjon fra mengden av alle naturlige tall, $\mathbb{N}$, til mengden av alle hele tall $\mathbb{Z}$

- x avbildes til $2 - x$

1.10 Noen sammenhenger er ikke funksjoner

I definisjonen startet vi med å se på hva en relasjon var og stilte til slutt krav om entydighet for at relasjonen skulle være en funksjon. Det betyr at det til enhver innverdi hører en og bare en utverdi. Det gjør at ikke alle sammenhenger mellom størrelser er funksjoner. En oppgave som møter elever er derfor oppgaver som denne

Oppgave 1



I koordinatsystemet er det tegnet en graf som viser sammenhengen mellom to størrelser, x og y .

- undersøk om y kan være en funksjon av x
- undersøk om x kan være en funksjon av y

Her er også en oppgave av samme type

Oppgave 2

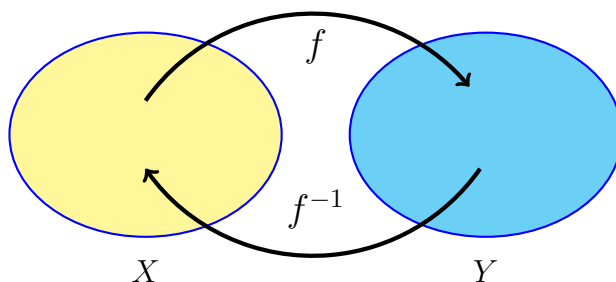
a	t
10	21
3	13
-4	2
10	2
11	27

Gitt denne verditabellen for variablene a og t .
Er t en funksjon av a ?

Hva blir svaret?

1.11 Den inverse funksjonen

Vi har sett at vi kan definere en funksjon som avbildning fra en mengde til en annen. En injektiv funksjon, f , som avbilder mengden X en-entydig på Y kan også ha en invers funksjon som avbilder Y på X . En slik funksjon skriver vi f^{-1} . Se figur 1.14. Skrivemåten for den inverse funksjonen kan forvirre en del elever som kan oppfatte notasjonen som en potens.



Figur 1.14: Den inverse funksjonen

Et eksempel kan vi finne i funksjonen $f(x) = x^3$. Det er en injektiv funksjon siden alle x -verdier gir forskjellige y -verdier. Den inverse funksjonen er gitt ved $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Oppgave 3

Har funksjonen $g(x) = x^2$ en invers funksjon? Forklar svaret.

- Gulliksen, T., Hashemi, A. M. & Hole, A. (2015). *Matematikk i praksis* (6. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 27–31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26.

Del II

Noen typer funksjoner

2 Polynomfunksjoner

2.1 Hva er en polynomfunksjon?

Navnet kommer fra gresk hvor *poly* betyr mange og *nom* betyr ledd. Da kan vi kalle det flerledda uttrykk på norsk. Så stilles det i tillegg noen andre krav enn at det bare skal være flere ledd, slik at vi ender opp med denne definisjonen

Definisjon 3

En polynomfunksjon er en funksjon med et funksjonsuttrykk på

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots kx + l$$

Den høyeste eksponenten bestemmer graden av en polynomfunksjon. Polynomfunksjonene som er mest vanlig i skolematematikken er derfor av disse typene

- 1. grad: $f(x) = ax + b$
- 2. grad: $g(x) = ax^2 + bx + c$
- 3. grad: $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Polynomfunksjonene er nok de vanligste i skolematematikken – og sikkert kjent fra før, men vi tar en liten oppsummering.

2.2 Førstegradsfunksjoner

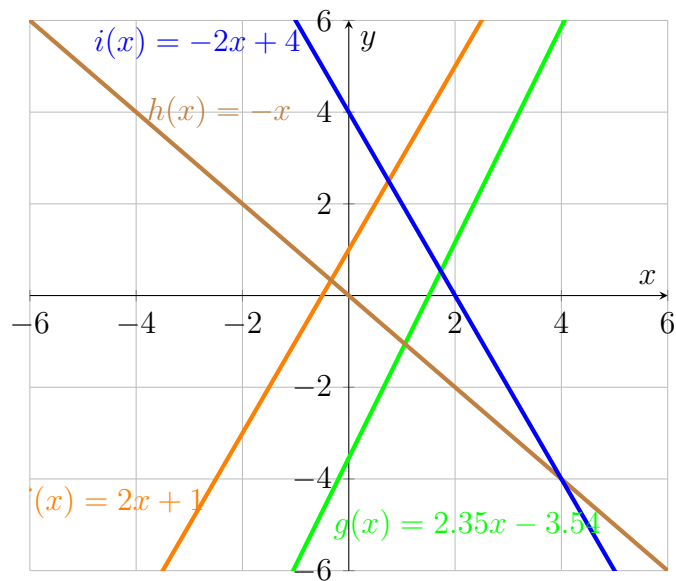
En polynomfunksjon av første grad kan også kalles en lineær funksjon. Den vokser jevnt og grafen er følgelig ei rett linje. Funksjonsuttrykket vil alltid kunne skrives på formen

$$f(x) = ax + b$$

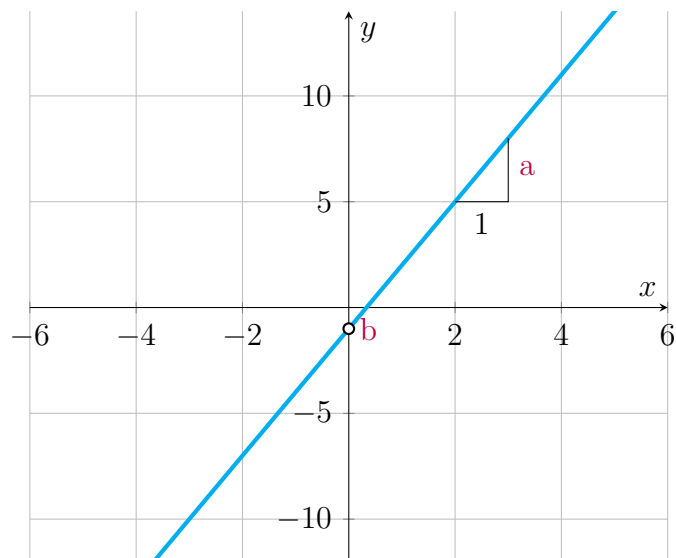
hvor a og b er parametre.

Figur 2.1 viser noen eksempler på grafer til polynomfunksjoner av første grad.

De to parametrene a og b bestemmer stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen, slik figur 2.2 viser. b vil være konstantleddet i funksjonsuttrykket.



Figur 2.1: Forskjellige lineære grafer



Figur 2.2: Stigningstall og konstantledd

Før vi går videre kan det være greit å prøve noen oppgaver som er typisk for ungdomstrinnet.

Oppgave 4

Ei rett linje går gjennom punktene $(1, 1)$ og $(3, 7)$.

- Tegn grafen til funksjonen
- Finn funksjonsuttrykket
- Hva er stigningstallet?
- Hva er konstantleddet?

Oppgave 5

Ei rett linje går gjennom punktet $(1, 1)$ og har stigningstall $a = 1$.

- Tegn grafen til funksjonen
- Finn funksjonsuttrykket
- Hva er konstantleddet?

Oppgave 6

Bruk en graftegner og tegn grafen til en generell førstegradsfunksjon

$$f(x) = ax + b$$

Lag glidere for a og b

Lineære funksjoner

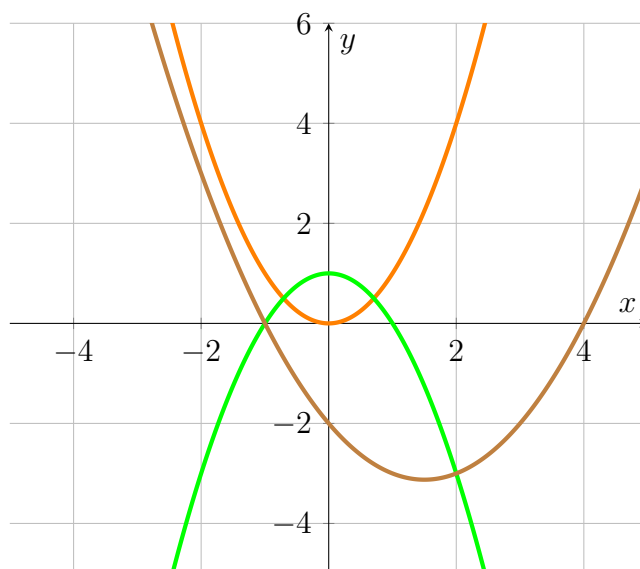
Polynomfunksjoner av første grad kalles ofte lineære funksjoner. I skolematematikken fører ikke det til misforståelser, men det kan være greit å være klar over at en lineær funksjon kan oppfattes på to måter i matematikken. Slik ordet benyttes om polynomfunksjoner av første grad vil en funksjon lineær hvis grafen er ei rett linje. I andre deler av matematikken stilles det krav om at en lineær funksjon må være både additiv og homogen. Da må $f(x+y) = f(x) + f(y)$ og $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$. Disse kravene fører til at bare funksjoner av typen $f(x) = ax$ kalles lineære. I en slik matematikk kan x og y være reelle tall, men også vektorer, funksjoner eller operatorer. Funksjoner av typen $f(x) = ax + b$ kalles da affine.

2.3 Andregradsfunksjoner

Andregradsfunksjoner har funksjonsuttrykk som er på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Grafen til en andregradsfunksjon vil være en parabel. Figuren viser noen eksempler.



Figur 2.3: Forskjellige parabler

En parabel er et kjeglesnitt. Setter vi to kjegler på hverandre kan de snittes på fire forskjellige måter slik at vi enten får en sirkel, ei ellipse, en parabel eller en hyperbel. Parabelen er et geometrisk sted definert ved

Definisjon 4

En parabel er mengden av alle punkter som ligger like langt fra ei gitt linje og et gitt punkt. Linja kalles ofte styringslinja og punktet for brennpunktet.

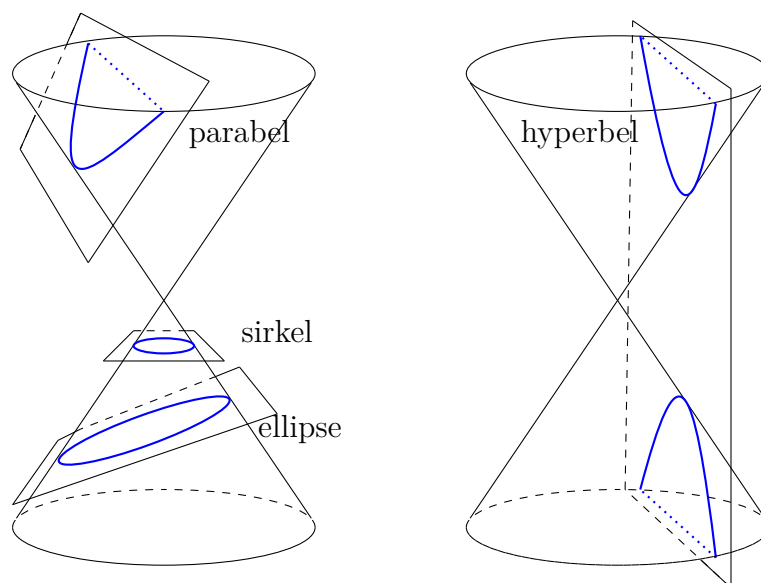
Parabelen er alltid symmetrisk om ei linje vi kaller symmetrilinja. Går ut fra den generelle formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ vil symmetrilinja ha likninga

$$x = -\frac{b}{2a}$$

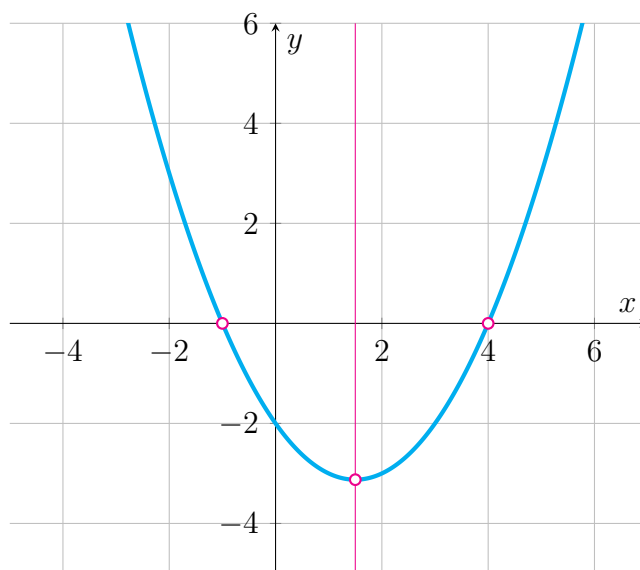
På grafen er det markert noen punkt som er viktige. Vi kan se to nullpunkt¹ og ett bunnpunkt. Nullpunktene kan vi bestemme ved å løse likning

$$f(x) = 0$$

¹Legg merke til at nullpunkt bare er x -verdiene som gjør likninga lik null og skal ikke skrives som koordinater



Figur 2.4: Kjeglesnitt

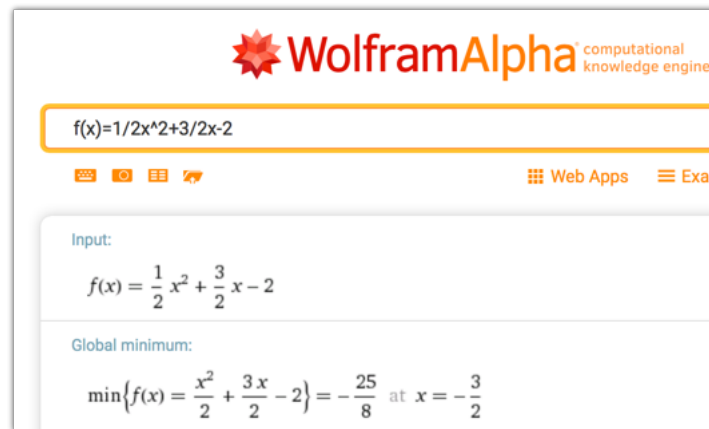


Figur 2.5: En parabel med nullpunkt $x = -1 \vee x = 4$ og bunnpunkt $(1.5, 3.1)$

Da ender vi opp med ei andregradslikning i en eller annen form.

I dette tilfellet har parabelen et bunnpunkt hvor x-verdien er den samme som symmetrilinja.

Figur 2.5 viser grafen til en funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ med nullpunkt og



Figur 2.6: Bunnpunktet funnet med WolframAlpha

bunnpunkt. Nullpunktene kan vi regne ut ved å benytte abc-formelen eller fullstendige kvadraters metode.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 &= 0 \\
 x &= \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \\
 x &= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
 x &= -1 \vee x = 4
 \end{aligned}$$

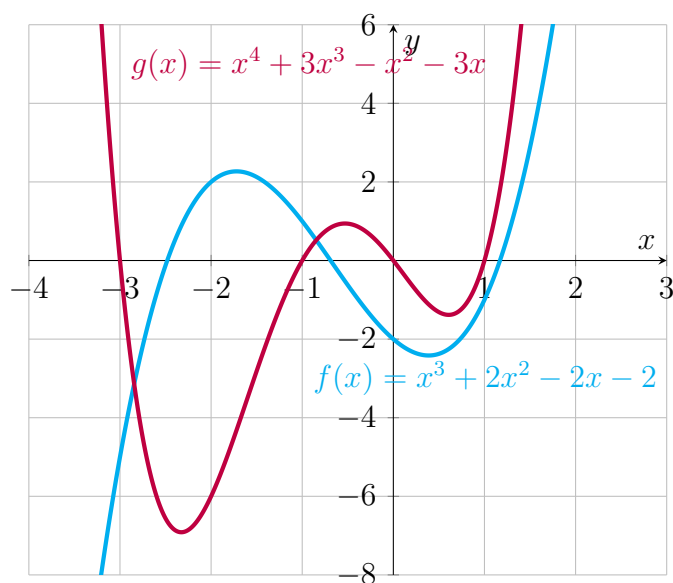
Bunnpunktet kan vi på flere måter, som vi skal se på seinere. Figur 2.6 viser hvordan vi kan finne et bunnpunkt med Wolfram Alpha².

2.4 Polynomfunksjoner av høyere grad

Polynomfunksjoner av høyere grad kan være strevsomme å håndtere med papir og blyant, men med hjelp av teknologien er det enklere.

²Wolfram Alpha kan enten lastes ned som en app eller benyttes på nettsida <http://www.wolframalpha.com>

Ser vi på figur 2.7 kan vi se grafene til en tredje- og en fjerdegradsfunksjon. Legg merke til at fjerdegradsfunksjonen kan ha fire nullpunkt, mens tredjegradsfunksjonen kan ha tre nullpunkt. Hvor mange nullpunkt kan en første- og en andregradsfunksjon ha?



Figur 2.7: Grafene til noen polynomfunksjoner

3 Rasjonale funksjoner

3.1 Hva er en rasjonal funksjon?

Kanskje det kan være greit å minne om hva et rasjonalt tall er? De rasjonale tallene er gitt symbolet, $\mathbb{Q}$, fra ordet kvotient. Et rasjonalt tall er mengden av alle tall som kan skrives som en brøk.

Definisjon 5

En rasjonal funksjon er en funksjon som kan uttrykkes ved en brøk hvor telleren og nevneren er polynomer.

$$r(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = \frac{a_1x^n + b_1x^{n-1} \cdots l_1x + m_1}{a_2x^n + b_2x^{n-1} \cdots l_2x + m_2}$$

Nevneren kan ikke være lik null. Graden til polynomene kan variere, men det må stilles et krav om at nevneren er minst av første grad.

I grunnskolen og videregående skole vil de rasjonale funksjonsuttrykkene i hovedsak være av typen

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

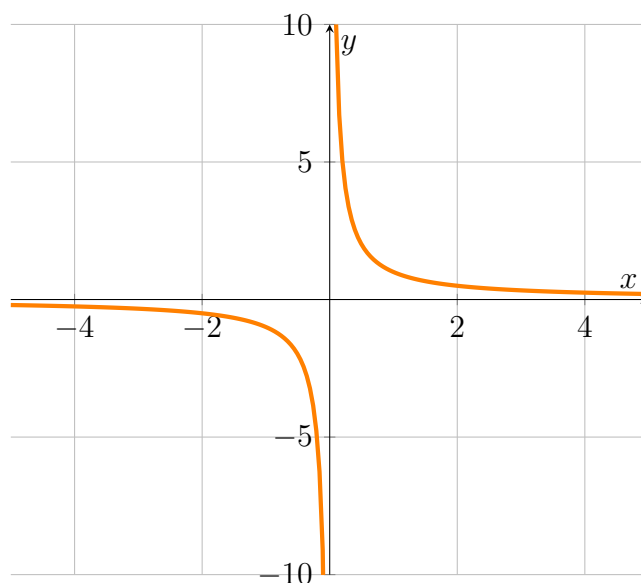
Da er både teller og nevner førstegradsfunksjoner.

3.2 Grafen til rasjonale funksjoner

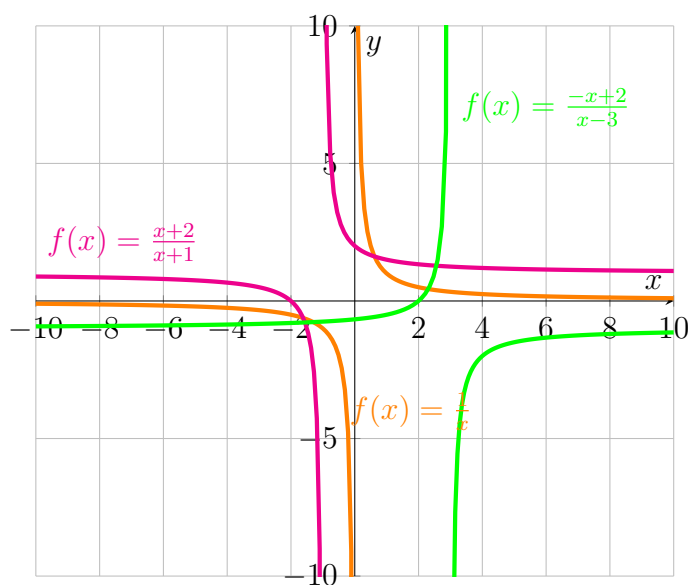
3.2.1 Hyperbler

Grafene til de rasjonale funksjonene kaller vi hyperbler og en typisk hyperbel kan du se i figuren under som viser grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$

Her er noen fler eksempler



Figur 3.1: Hyperbler

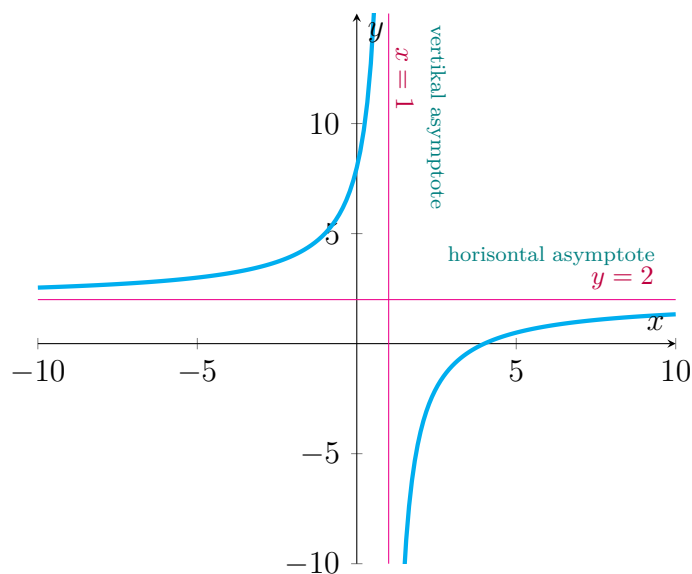


3.2.2 Asymptoter

Asymptoter er rette linjer som opptrer i forbindelse med hyperbler. Grafen til funksjonen nærmer seg disse linjene ved noen tilfeller. Ordet asymptote stammer opprinnelig fra gresk hvor asymptotus betyr «ikke sammenfallende»

og det stemmer med egenskapene til asymptotene. Grafen vil nærme seg, men aldri falle sammen med asymptoten. Asymptotene kan være både vertikale, horisontale eller skrå. La oss se på et eksempel hvor funksjonen er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x - 8}{x - 1}$$



I koordinatsystemet er det tegnet to linjer. Det er asymptotene. Den horisontale asymptoten har likninga $y = 2$. Den vertikale asymptoten har likninga $x = 1$.

Det er to egenskaper ved de rasjonale funksjonene som fører til asymptotene. For det første må ikke nevneren ha verdien null. I vårt tilfelle skjer det hvis $x = 1$. For det andre vil funksjonsverdiene nærme seg en bestemt verdi når vi setter inn store, eller små, verdier. I dette tilfellet betyr det at når vi setter inn store verdier for x , så vil y være omtrent 2. La oss se mer på hva det betyr.

Vertikal asymptote

Hva skjer med funksjonsverdien hvis x er i nærheten av 1. Det kan vi se av tabellen under.

x	funksjonsverdi
1.1	$f(1.1) = -58$
1.01	$f(1.01) = -598$
1.001	$f(1.001) = -5998$
1.0001	$f(1.0001) = -59998$
1.00001	$f(1.00001) = -599998$
1.000001	$f(1.000001) = -5999998$
1.0000001	$f(1.0000001) = -59999998$

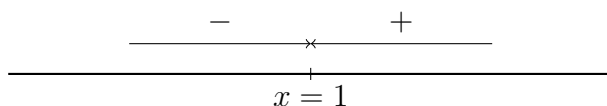
Prøv sjøl hva som skjer ved å sette inn verdier som nærmer seg 1 fra 0.9

Konklusjonen er at funksjonsverdiene blir svært store og det kan vi se av grafen også. Nå er det to sider vi kan nærme oss 1 fra på tallinja. Enten fra den positive sida slik vi har gjort i tabellen over, eller fra den negative sida slik du skulle prøve. Vi skriver det slik

$$x \rightarrow 1^+$$

$$x \rightarrow 1^-$$

Her er en figur som viser situasjonene



Både grafen, verdiene i tabellen og eksperimentering tyder på at når $x \rightarrow 1^+$ (les: «x går mot 1 fra den positive sida») så vil $f(x)$ gå mot uendelig store verdier. Det skriver vi som

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ når } x \rightarrow 1^+$$

Tilsvarende kan vi skrive

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ når } x \rightarrow 1^-$$

Slår vi det hele sammen kan vi skrive

$$f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ når } x \rightarrow 1$$

Det betyr at vi har funnet et bruddpunkt for grafen til funksjonen. Funksjonen kan være definert for alle reelle tall unntatt den verdien som gjør nevneren lik null. Definisjonsmengden til funksjonen f er derfor

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Likninga til den vertikale asymptoten er

$$x = 1$$

og den kan tegnes som ei rett vertikal linje gjennom $x = 1$.

Den vertikale asymptoten kan defineres slik

Definisjon 6

Hvis $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ eller $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ er enten er lik ∞ eller $-\infty$ er linja $x = a$ en vertikal asymptote til funksjonen f

Horisontal asymptote

Hva skjer med funksjonsverdien hvis verdien av x vokser? Det kan vi finne ut mer om ved å eksperimentere litt.

x	funksjonsverdi
1000	$f(1000) = 1.993993993994$
1000000	$f(1000000) = 1.999993999994$
-1000000	$f(-1000000) = 2.000005999994$

Her er det bare å fortsette, men konklusjonen bør nok være at setter vi inn store verdier vil vi få en verdi som er omtrent lik 2. Vi skriver det som

$$f(x) \rightarrow \text{når } x \rightarrow \pm\infty$$

Nå satte vi inn verdier og kunne observere at funksjonsverdien ble omtrent 2. Det kan vi også se at funksjonsuttrykket. Tenk deg at x er et stort tall. Da vil brøken nærme seg 2

$$\frac{2x - 8}{x - 1} \approx 2 \text{ ved store verdier av } x$$

En annen måte er å skrive om uttrykket for å se det samme.

$$f(x) = \frac{2x - 8}{x - 1} = \frac{2 - \frac{8}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \approx \frac{2}{1}$$

Igjen blir konklusjonen at

$$f(x) \rightarrow 2 \text{ når } x \rightarrow \pm\infty$$

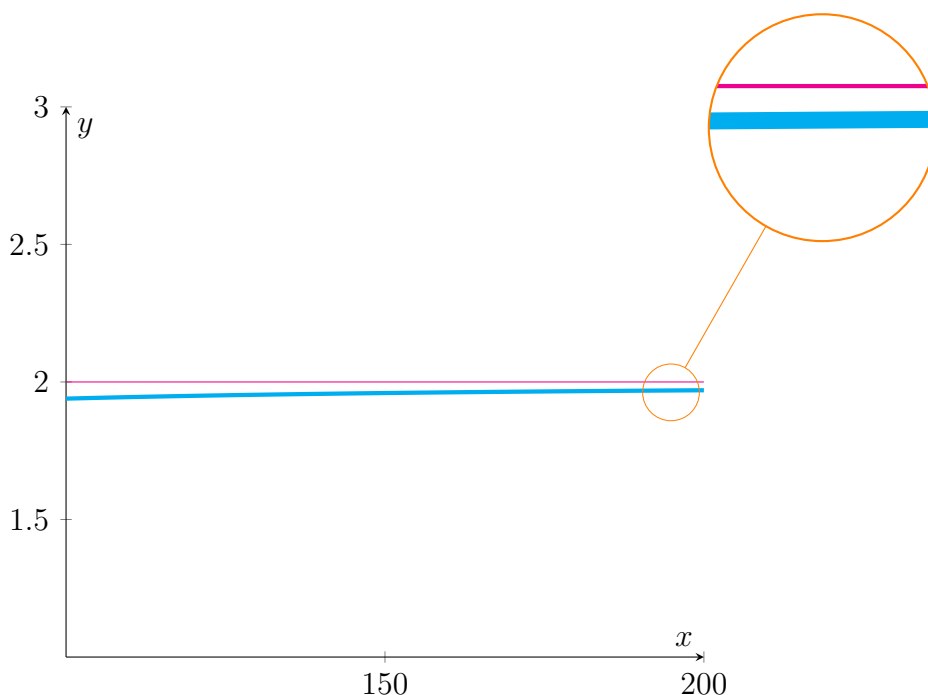
Nå oppstår behovet for å se litt på noe som heter for grenseverdier for vi kan skrive det samme slik

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

Der står der «Grenseverdien til f når x går mot uendelig er lik 2». 2 er den verdien funksjonsverdien nærmer seg når x vokser. Legg merke til at grenseverdien *er* 2, mens funksjonsverdien *nærmer seg* 2. Den horisontale asymptoten er denne grenseverdien. Likninga til den horisontale asymptoten kan vi skrive som

$$y = 2$$

Tegner vi grafen for noen store verdier av x kan den se slik ut.



Legg merke til forstørrelsen av grafen. Her er det bare å zoome seg inn. Det vil være en avstand mellom funksjonsverdien og den horisontale asymptoten.

Den vil bli mindre og mindre og grenseverdien av forskjellen vil bli *lik* null. Legg igjen merke til at grenseverdien er en *verdi* sjøl om vi tenker at det aldri helt blir det samme. Det samme paradokset finne vi igjen i paradoksene til Zenon.

Vi kan skrive det slik

Linja $y = 2$ er en horisontal asymptote fordi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |y - f(x)| = 0$

Skrivemåten er kanskje litt uvant og trenger en forklaring? Lest ordrett står det at linja $y = 2$ er en horisontal asymptote fordi differensen mellom $y = 2$ og funksjonsverdien til f , $f(x)$, vil være null når x enten går mot pluss eller minus uendelig. De to vertikale strekene er symboler for absoluttverdien og forteller oss at det alltid er den positive verdien av differensen vi betrakter.

Det kan også være en definisjon på en horisontal asymptote

Definisjon 7

Vi sier at linja $y = a$ er en horisontal asymptote til funksjonen f når $\lim_{x \rightarrow \infty} |y - f(x)| = 0$. Det samme gjelder når $x \rightarrow -\infty$.

3.3 Noen typiske oppgaver

Oppgave 7

Vi har gitt funksjonen $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$

- a) Finn nullpunkt og skjæringspunkt med andreaksen ved regning.
- b) Bestem asymptotene til funksjonen

En funksjon er gitt ved $g(x) = -x + 3$.

- c) Bestem skjæringspunktene mellom grafene til f og g

La oss se hvordan denne oppgaven kan løses. Her følger et løsningsforslag.

Vi har altså gitt funksjonen $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$

- a) Finn nullpunkt og skjæringspunkt med andreaksen ved regning.

Nullpunkt finner vi ved å løse likninga $f(x) = 0$. En brøk er lik null når telleren er lik null.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} &= 0 \\ 2x-1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Svar: Nullpunkt $x = \frac{1}{2}$

Skjæringspunkt med andreaksen finner vi når $x = 0$

$$f(0) = \frac{-1}{1} = -1$$

Svar: Skjæringspunkt med andreaksen $(0, -1)$

b) Bestem asymptotene til funksjonen.

Bruddpunktet til f finner vi for den x -verdien som gjør at nevneren lik null. Funksjonsverdien eksisterer ikke for den verdien. Bruddpunktet $x = -1$. Det er også likninga til den vertikale asymptoteten.

Svar: Vertikal asymptote: $x = -1$

Den horisontale asymptoten finner vi ved å se på funksjonsverdien for store og små x -verdier. Her er noen av funksjonsverdiene:

funksjonsverdi	uttrykk	desimaltall
$f(100)$	$\frac{199}{101}$	1.970 3
$f(-1000)$	$\frac{667}{333}$	2.003
$f(1000)$	$\frac{1999}{1001}$	1.997
$f(-10000)$	$\frac{6667}{3333}$	2.000 3
$f(10000)$	$\frac{19999}{10001}$	1.999 7
$f(-100000)$	$\frac{66667}{33333}$	2.0
$f(-1000000)$	$\frac{666667}{333333}$	≈ 2.0

Vi kan også se på funksjonsuttrykket og tenke oss at det å legge til eller trekke fra 1 vil ha liten betydning når x -verdiene er store. Det betyr at $\frac{2x-1}{x+1} \approx \frac{2x}{x}$ når x er stor. Den siste brøken ser vi kan forkortes til 2.

Alternativt kan vi skrive om slik

$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Da er det muligens greiere å se at funksjonsverdien vil nærme seg 2 når x -verdiene er store?

Svar: Horisontal asymptote $y = 2$

c) En funksjon er gitt ved $g(x) = -x + 3$. Bestem skjæringspunktene mellom grafene til f og g

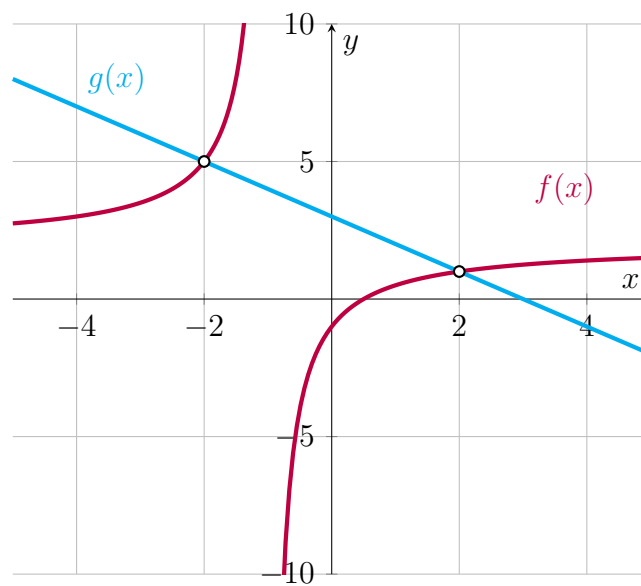
Ved regning

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \frac{2x-1}{x+1} &= -x+3 \\
 2x-1 &= (-x+3)(x+1) \\
 2x-1 &= -x^2+2x+3 \\
 x^2 &= 4 \\
 x &= 2 \vee x = -2
 \end{aligned}$$

y-verdiene $f(2) = 1$ $f(-2) = 5$

Svar: Skjæringspunktene er $(2, 1)$ og $(-2, 5)$

Grafisk



Oppgave 8

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = \frac{-2x+3}{x-2}$

- Bestem definisjonsmengden D_g til g
- Bestem asymptotene til g
- Bestem verdimengden til g

Et forslag til løsning.

Vi har gitt funksjonen g er gitt ved $g(x) = \frac{-2x+3}{x-2}$ og første oppgave er

a) Bestem definisjonsmengden D_g til g

I definisjonsmengden kan vi ikke ha med verdier som gjør nevneren lik null. Det ser vi at den blir når $x = 2$. Dermed blir svaret alle reelle tall untatt 2

Svar: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) Bestem asymptotene til g

Vertikal asymptote Grafen til g har et bruddpunkt for den x-verdien som gjør at nevneren blir lik null. Siden den vertikale asymptoten er ei linje, er linja $x = 2$ en god kandidat til vertikal asymptote for funksjonen. Vi bør allikevel undersøke nærmere hva som skjer. Det er et krav at $f(x) \rightarrow \pm\infty$ for denne verdien. Ellers er $x = 2$ ingen asymptote.

Vi gjør undersøkelsen ved å se på telleren og nevneren i funksjonsuttrykket

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 3) = -1$$

Telleren vil altså gå mot en verdi ulik null i det nevneren går mot null. Funksjonen går da mot uendelig. Da har vi en vertikal asymptote! Vi skriver det slik: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ når $x \rightarrow 2$ fordi telleren $-2x + 3 \rightarrow -1$ og nevneren $x - 2 \rightarrow 0$

Svar: Linja $x = 2$ er en vertikal asymptote

Horisontal asymptote Hva skjer når x vokser og blir veldig stor? Ofte kan det være enklere å skrive om uttrykket for å avgjøre det

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x+3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{-2}{1} = -2$$

Her er brøken gjort om ved å dividere hvert ledd med x . Grunnen til det er at det kan være enklere å se. Vi betrakter brøkene $\frac{3}{x}$ og $\frac{2}{x}$. Hva skjer når x vokser? Da vil verdiene bli nær null og vi kan konkludere med at disse leddene ikke er av betydning for verdien til den store brøken.

Svar: Linja $y = -2$ er en horisontal asymptote fordi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |y - g(x)| = 0$

c) Bestem verdimengden til g Verdimengden er alle verdiene funksjonsverdien kan ha. Da er det én verdi som må utelates. Det er hvor vi finner den horisontale asymptoten. Verdimengden blir der for alle reelle tall untatt -2

Svar: $V_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Oppgave 9

Bestem asymptotene til funksjonen gitt ved:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 4}$$

Vertikale asymptoter Kandidater til vertikale asymptoter har vi for de x -verdiene som gjør at nevner lik null. I dette tilfellet skjer det når

$$x = -2 \vee x = 2$$

Vi undersøker telleren i brøken

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 2) = 6$$

Telleren går mot 6 og nevneren går mot null i begge tilfeller. Da vil $f(x) \rightarrow \infty$

Svar: Vertikale asymptoter $x = -2 \vee x = 2$

Horisontal asymptote finner vi ved å se på hva som skjer med funksjonsverdiene når $x \rightarrow \pm\infty$ I disse tilfellene konstantene, -2 og -4 , i teller og nevner ha liten betydning.

Funksjonen vil gå mot $\frac{2x^2}{x^2} = 2$

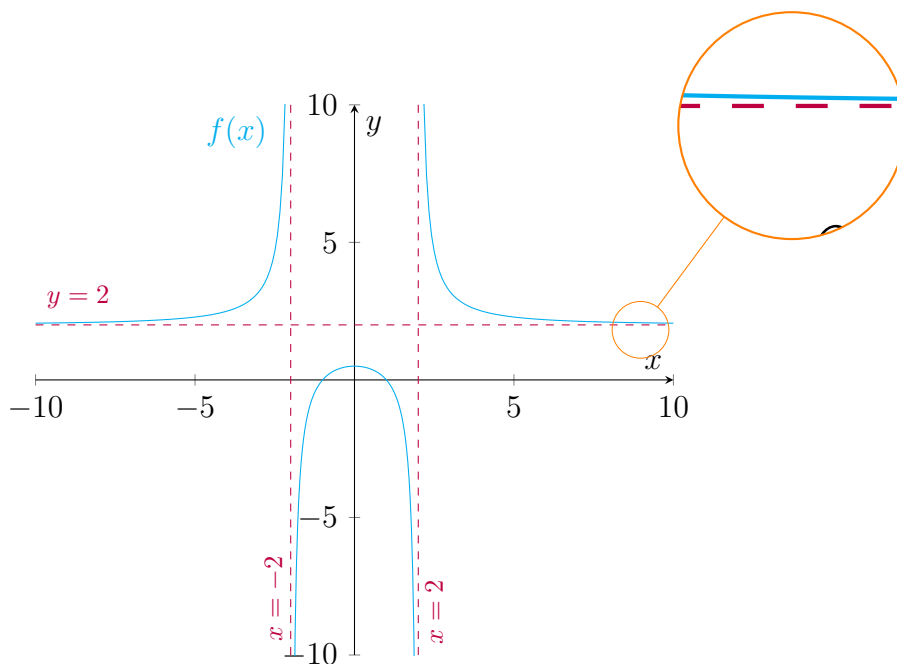
Med matematisk notasjon skriver vi dette slik:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Den horisontale asymptoten blir derfor $y = 2$ fordi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |y - f(x)| = 0$

Svar: Horisontal asymptote $y = 2$

La oss tegne grafen for se at dette stemmer



3.4 Hva er en grenseverdi?

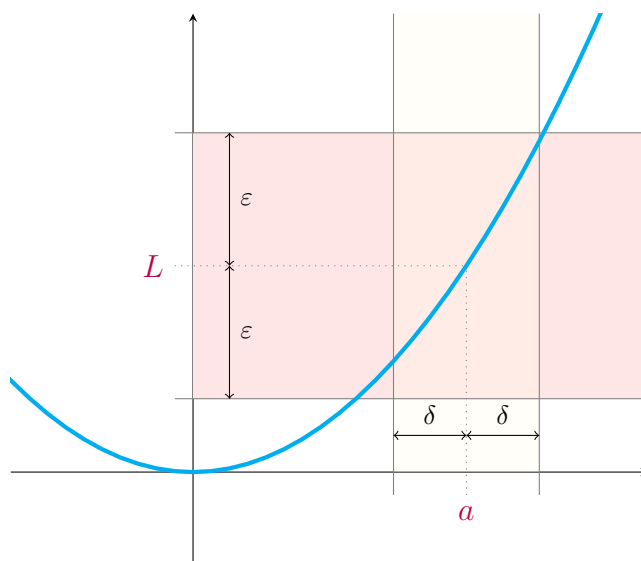
Vi har unngått en definisjon av grenseverdier så langt, men nå mot slutten er det på sin plass å skrive ned en definisjon.

Definisjon 8

Anta at funksjonen f er definert nær a . Vi sier at $f(x)$ nærmer seg verdien L når x går mot a under følgende forutsetning. For ethvert tall $\varepsilon > 0$ fins det et tall $\delta > 0$ slik at $|f(x) - L| < \varepsilon$ for alle x slik at $0 < |x - a| < \delta$. Da skriver vi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Hva betyr det



Hva er det egentlig denne definisjonen sier? Den sier hva en grenseverdi er, så vi må starte med å anta at den eksisterer i vårt tilfelle. Da er det at definisjonen sier at vi kan velge oss en verdi $\varepsilon > 0$ som bredde på et område med verdien L i midten. Da kan vi tegne to horisontale linjer som har likninger $L + \varepsilon$ og $L - \varepsilon$. På figuren er området rødt. Da skal det også finnes en verdi $\delta > 0$ som vi kan velge som avstand fra verdien a . Da ender vi opp med området som er merket gult i figuren. Velger vi oss en verdi x i det gule området vil den verdien ligge nærmere a enn både $a - \delta$ og $a + \delta$. Altså

$$|x - a| < \delta$$

Ser vi på punktet på grafen som svarer til den valgte x -verdien vil det punktet ligge i skjæringsområdet for det gule og det røde området. Da vil funksjonsverdien $f(x)$ være nærmere L enn både $L + \varepsilon$ og $L - \varepsilon$:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Vi kan altså velge hvilken som helst x i det gule området og da vil grafen ligge i det røde området.

Definisjon 9

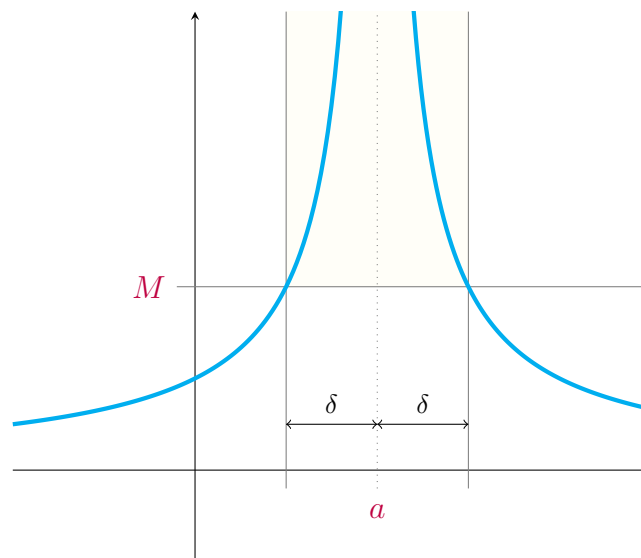
La $f(x)$ være en funksjon. Vi sier at

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

hvis det for hvert tall $M > 0$ er et tall $\delta > 0$ slik at

$$f(x) > M \text{ for alle } 0 < |x - a| < \delta$$

Her er en figur som kan være til hjelp.



Denne definisjonen forteller oss at uansett hvor stor verdi vi velger for M så fins det alltid et intervall rundt $x = a$ som er avgrenset av $a - \delta$ og $a + \delta$. Så lenge verdien er innafor det området vil grafen til f alltid være over linja $y = M$. Legg merke til at det ikke stilles krav om at f skal være definert for $x = a$

4 Potensfunksjoner

4.1 Potensfunksjoner

Hva er en potensfunksjon? Av navnet bør det ha noe med potenser å gjøre og det er nettopp det som er tilfelle. Benytter vi samme generelle skrivemåte som for de andre funksjonen, kan vi skrive funksjonsuttrykket til en potensfunksjon slik:

$$f(x) = a \cdot x^b$$

Da ser vi at funksjonsuttrykket inneholder en potens med innverdien, x , som grunntall. Potensfunksjoner omfatter flere typer og kanskje syns du uttrykket virker kjent? Hva med $f(x) = x^2$? Jo, den kan godt kalles både en polynomfunksjon og en potensfunksjon. Hva med $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$? Siden eksponenten ikke er et heltall er ikke det en polynomfunksjon, men g er en potensfunksjon.

Vi kan summere opp dette slik. Hvis b er et positivt heltall, vi kan skrive det som $b \in \mathbb{Z}$. Da er potensfunksjonen også en polynomfunksjon. Er eksponenten et negativt heltall vil potensfunksjonen i tillegg være en rasjonal funksjon. En negativ eksponent betyr i følge definisjonen at

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

og dermed havner potensfunksjonen også i denne kategorien. En annen definisjon er at

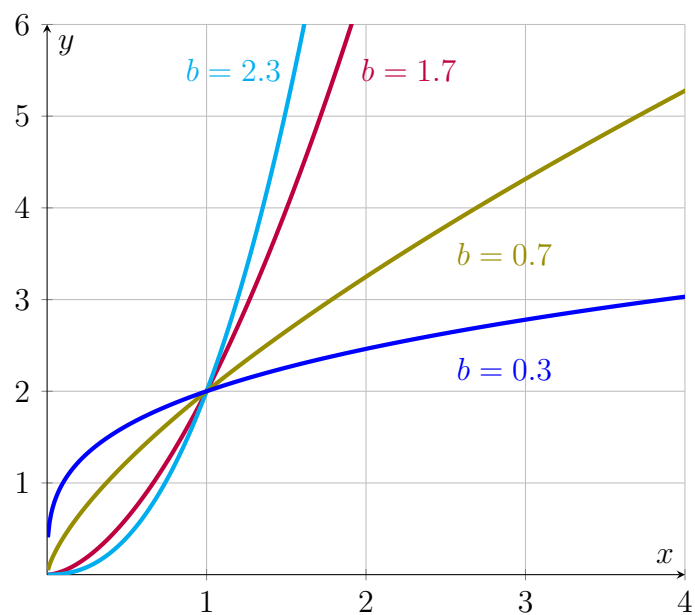
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Det betyr igjen at vi må forutsette at $x > 0$ fordi vi ikke kan finne kvadratrota til et negativt tall.

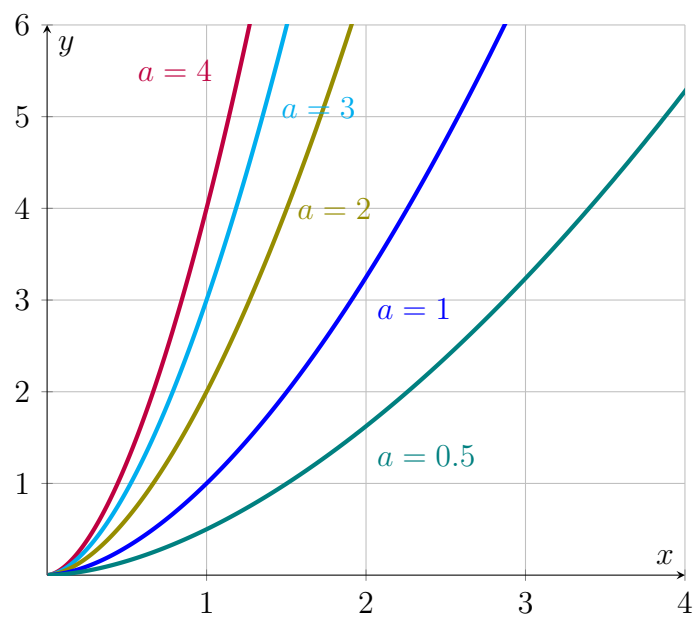
4.2 Grafen til potensfunksjonen

La oss se på hvilken betydning eksponenten har i det generelle uttrykket. Se på grafene i figur 4.1. Hvordan forandrer eksponenten utseende på grafen.

I uttrykket $a \cdot x^b$ vil verdien a også være viktig for egenskapene til funksjonen. I figur 4.2 kan du se flere grafer tegnet hvor verdien til a er forskjellig. Hva kan vi observere?



Figur 4.1: Forskjellige eksponenter i uttrykket $2 \cdot x^b$



Figur 4.2: Forskjellige verdier for a i uttrykket $a \cdot x^{1.7}$

Oppgave 10

Skriv inn en generell potensfunksjon

$$f(x) = a \cdot x^b$$

i et graftegneverktøy. Lag en glider for a og b . Eksperimenter med gliderne og se hva parameterne gjør med grafen.

4.3 Noen eksempler og oppgave

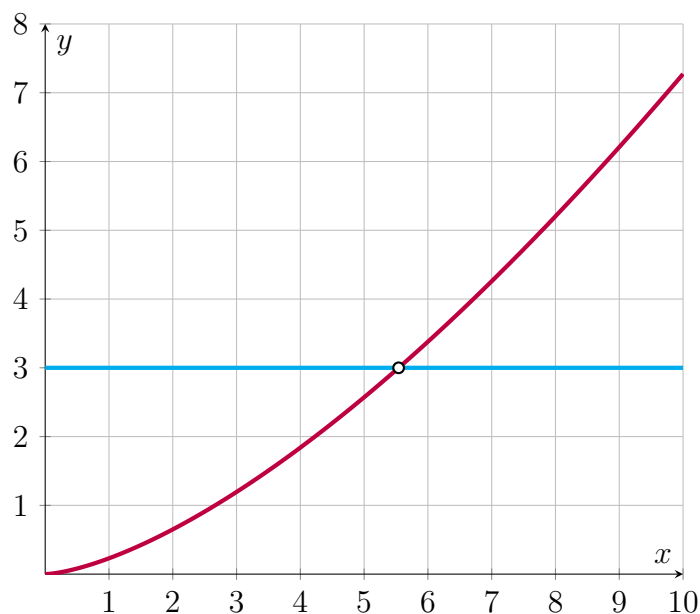
Oppgave 11

En gruppe forskere har funnet ut at høyden på et tre etter x år kan finnes ved denne funksjonen:

$$v(x) = 0.23 \cdot x^{1.5}$$

Etter hvor mange år vil treet bli 3 m?

Her kan det være lurt å starte med å tegne grafen



En gruppe forskere har funnet ut at høyden på et tre etter x år kan finnes ved denne funksjonen:

$$v(x) = 0.23 \cdot x^{1.5}$$

Etter hvor mange år vil treet bli 3 m

Slik kan vi regne ut det samme

$$0.23 \cdot x^{1.5} = 3$$

$$x^{1.5} = \frac{3}{0.23}$$

$$x^{1.5} = 13.0435$$

$$x = 13.0435^{\frac{1}{1.5}}$$

$$x = 5.541$$

Et eksempel til Noen forskere har funnet ut at sammenhengen mellom rugetida r (dager) avhenger av massen til egget. Kaller vi massen i g m har vi

$$r(m) = 11 \cdot m^{0.23}$$

Hvor lang tid...

Hjerterytmen For pattedyr er hjerterytmen i slag per minutt sammenhengende med kroppsvekta $r(m) = 241m^{-0.25}$

Lengden

4.3.1 Allometri

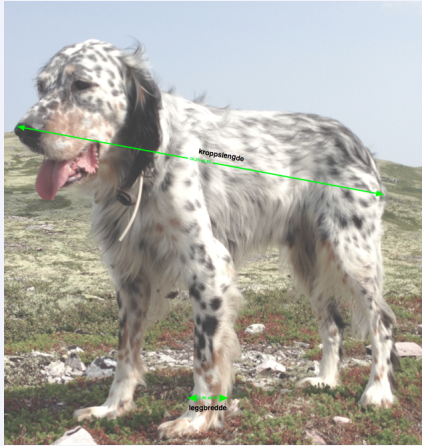
Hos pattedyr med fire bein er det vanlig at forholdet mellom bredden av leggen og kroppslengden følger denne formelen.

$$\text{leggbredde} = \text{en konstant} \cdot \text{kroppslengde}^{\frac{3}{2}}$$

Konstanten varierer, men ellers stemmer formelen godt for alt fra mus til elefant.

Oppgave 12

Kroppslengde hos hund



For hunden på bildet er konstanten funnet. Funksjonsuttrykket som viser sammenhengen mellom leggbredde (l) og kroppslengde (k) er gitt ved:

$$l(k) = 0.0011 \cdot k^{\frac{3}{2}}$$

Alle lengdene er i millimeter.

En gang da hunden var valp ble leggbredden målt til 17 mm. Hvilken kroppslengde hadde hunden da?

5 Eksponentialfunksjoner

5.1 Et eksempel på eksponentiell vekst

Hva vil det si at noe vokser eksponentielt? Vi starter med en klassisk oppgave. Prøv deg på oppgaven før du går videre.

Oppgave 13

Kari setter 1000 kr i banken på en konto som gir 3,45 % rente (pro anno = per år). Finn uttrykket til en funksjon som har antall år som innverdi og beløpet hun har i banken som utverdi.

Løsning Vi kan sette opp en tabell som viser hvor mye Kari har i banken.

År	Utrekning	Beløp
1 år	$= 1000 \cdot \left(1 + \frac{3,45}{100}\right)$	$= 1000 \cdot 1,0345$
2 år	$= 1000 \cdot 1,0345 \cdot 1,0345$	$= 1000 \cdot 1,0345^2$
3 år	$= 1000 \cdot 1,0345^2 \cdot 1,0345$	$= 1000 \cdot 1,0345^3$
4 år	$= 1000 \cdot 1,0345^3 \cdot 1,0345$	$= 1000 \cdot 1,0345^4$
n år	$= \dots$	$= 1000 \cdot 1,0345^n$

Dette forklarer hvordan vi ender opp med denne formelen for kapitalen etter n år

$$K(n) = 1000 \cdot 1,0345^n$$

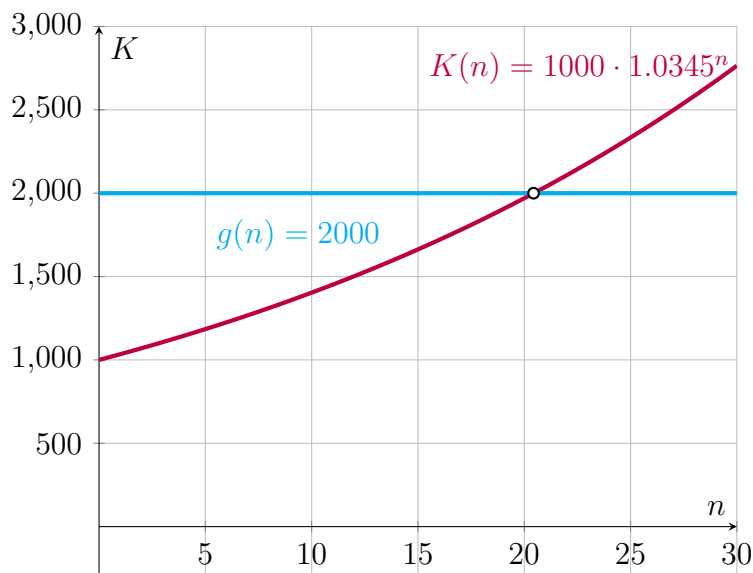
Generelt kan vi skrive rentes-rente-formelen slik

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Ofte er det ved renteregning at elevene i grunnskolen møter eksponentiell vekst hvor antall år vil være en variabel som eksponent.

Når vi nå har et uttrykk for hvordan pengene til Kari vokser kan et tilleggs-spørsmål være: Etter hvor mange år har hun 2000 kr i banken?

Den kan løses grafisk ved at vi leser av skjæringspunkt mellom grafen som viser hvor mange penger hun har i banken og linja som viser 2000.



Eller vi kan prøve oss fram

$$K(20) = 1970,65$$

$$K(21) = 2038,64$$

Her ser vi at svaret må bli: Etter 21 år har hun 2000 kr i banken.

For å løse slike likninger på andre måter vi benytte logaritmer.

5.2 En definisjon av eksponentialfunksjoner

Nå kan vi definere hva en eksponentialfunksjon er.

Definisjon 10

En eksponentialfunksjon er en funksjon på formen

$$f(x) = a \cdot b^x$$

hvor a og b er konstanter. Her må $b > 0$

Her er noen eksempler på funksjonsuttrykk

$$\begin{aligned}f(x) &= 12 \cdot 0,85^x \\K(n) &= 1970 \cdot 1,23^n \\n(x) &= 109 \cdot 1,7986^x \\V(t) &= 93 \cdot 0,76^t\end{aligned}$$

En egenskap det kan være greit å være klar over ved eksponentialfunksjoner er at

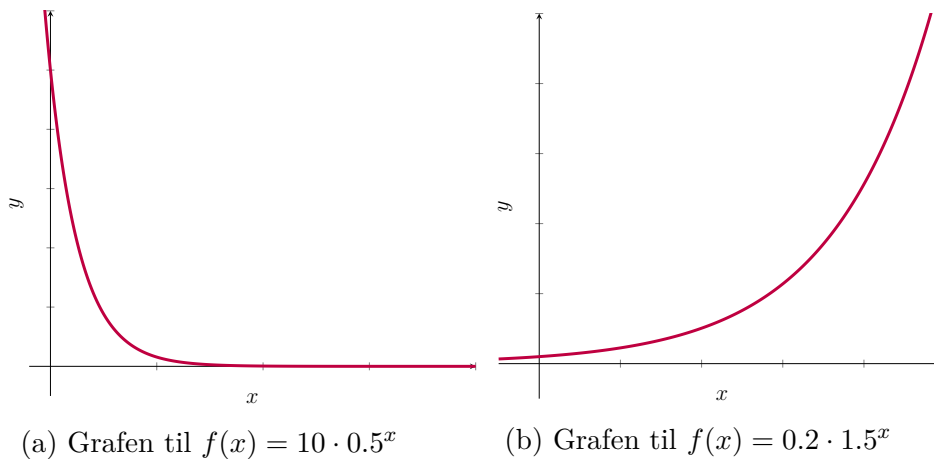
Teorem 1

For alle verdier av x vil gjelder det for en eksponentialfunksjon $f(x) = b \cdot a^x$ at

$$f(x+1) = a \cdot f(x)$$

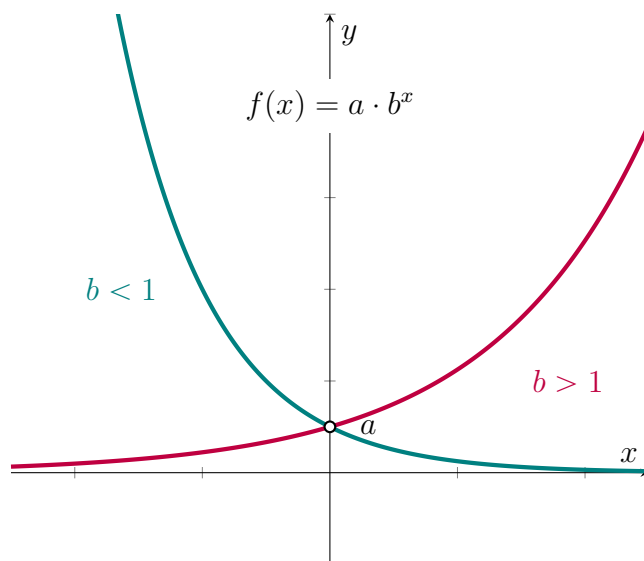
5.3 Grafen til $f(x) = a \cdot b^x$

Eksponentiell vekst



Figur 5.1: Eksempler på grafer

Vi ser at vekstegenskapene bestemmes av verdien på b . Det kan vi oppsummere slik



Oppgave 14

Tegn funksjonen

$$f(x) = a \cdot b^x$$

med et digitalt hjelpemiddel. Lag glidere for a og b .

- La først $a = 1$ og eksperimenter med forskjellige verdier for b . Hva skjer?
- Undersøk hva som skjer med grafen når du forandrer på a . Hva skjer?

5.4 Noen oppgaver

5.4.1 Gjeddepopulasjonen i Svartvannet

Oppgave 15

Antall gjedder i Svartvannet synker med 8 % hvert år. I 2014 er det 3254 gjedder i vannet

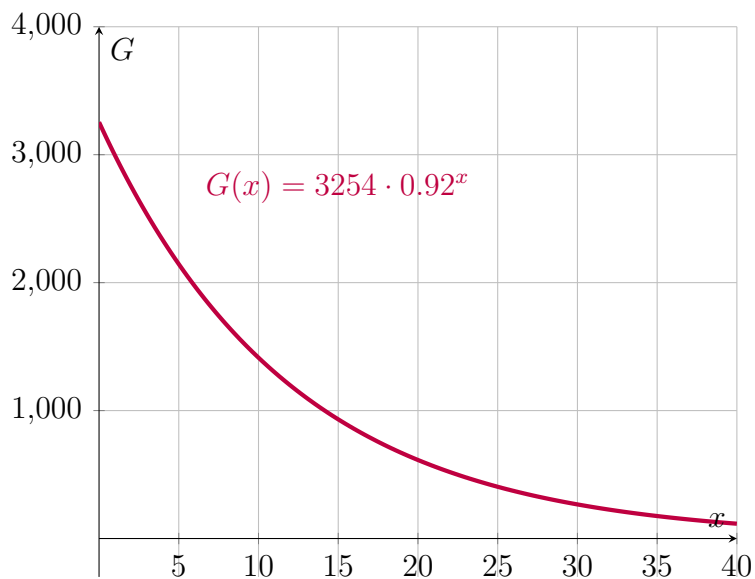
- Finn et funksjonsuttrykk for antall gjedder x år etter 2014
- Tegn grafen til funksjonen

Løsning Først finner vi vekstfaktoren $(1 - \frac{8}{100}) = 0.92$

Da kan vi sette opp funksjonsuttrykket

$$G(x) = 3254 \cdot 0.92^x$$

Grafen som viser sammenhengen mellom gjeddepopulasjonen og antall år etter 2014 vil se slik ut



5.4.2 Flere oppgaver

Oppgave 16

Du setter inn 5000 kr i banken til 3 % rente. Hvor mange penger har du i banken etter

- ett år?
- fem år?
- n år?
- Etter hvor mange år vil beløpet ha fordoblet seg?

Oppgave 17

I en saueflokk har det brutt ut en smittsom sykdom. Antall smitta sauer øker med 25% hver uke. Da sykdommen ble oppdaget var 23 sauer smitta. Forskere har funnet at antall dyr som er smitta kan beskrives av en eksponentialfunksjon på formen $n(x) = a \cdot b^x$

- a) Vis at antall dyr som er smitta etter x uker kan beskrives av funksjonen:
$$n(x) = 23 \cdot 1.25^x$$
- b) Hvor mange dyr er smitta etter 5 uker?
- c) Hvor lang tid tar det før 170 sau er smitta?

Oppgave 18

Hvor mange ganger må vi brette et papirark for å komme til månen?

Noen opplysninger

- tykkelsen på arket er 0.1 mm
- avstanden til månen er 375000 km

Finn et funksjonsuttrykk som viser sammenhengen mellom tykkelsen og antall brett.

6 Funksjoner med delt forskrift

6.1 Bankrenter

En enkel funksjon med delt forskrift vil vi finne i denne situasjonen.

Ved sparing i en bank tilbys du 2% rente p.a for beløp opp til og med 50 000 kr. Har du flere sparepenger vil du fra dette beløpet og opp til og med 150 000 kr oppnå 3% rente p.a. Har du enda mer, får du 5%.

Vi ønsker å finne en funksjon som er en matematisk modell for renta vi får. La oss kalle den funksjonen for f og beløpet som spares kaller vi x . Lager vi en tabell for intervall og rente kommer vi fram til denne tabellen

intervall	rente	funksjonsuttrykk
$[0, 50000]$	2%	$f(x) = 0.02x$
$\langle 50000, 150000 \rangle$	3%	$f(x) = 0.03x - 500$
$\langle 150000, \rightarrow \rangle$	5%	$f(x) = 0.05x - 3500$

Fra første kroner funksjonsuttrykket $f(x) = 0.02x$. I det neste intervallet vil vi få 3% rente på beløpet over 50 000. Det gir dette funksjonsuttrykket

$$f(x) = 0.02 \cdot 50000 + (x - 50000) \cdot 0.03 = 0.03x - 500$$

Over 150 000 kr vil funksjonsuttrykket være

$$f(x) = 0.02 \cdot 50000 + 0.03 \cdot 100000 + (x - 150000) \cdot 0.05 = 0.05x - 3500$$

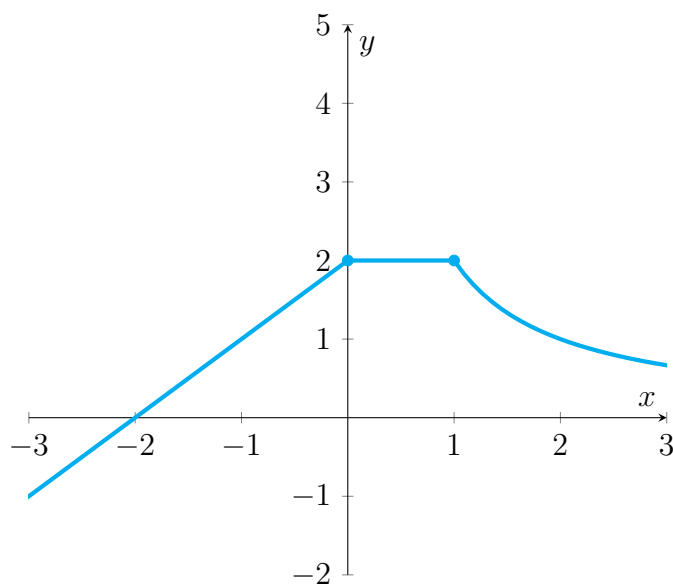
Funksjonsuttrykket kan vi skrive på denne måten

$$f(x) = \begin{cases} 0.02x, & x \in [0, 50000] \\ 0.03x - 500, & x \in \langle 50000, 150000 \rangle \\ 0.05x - 3500, & x \in \langle 150000, \rightarrow \rangle \end{cases}$$

6.2 Et eksempel til

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & 1 > x \end{cases}$$

Dette er også en funksjon med delt forskrift. Vi ser at funksjonen har forskjellig matematisk uttrykk alt etter hvilket intervall argumentverdien er i. Grafen til denne funksjonen vil se slik ut



6.3 Absoluttverdifunksjonen

Funksjonen som gir absoluttverdien til en verdi, x , skriver vi som

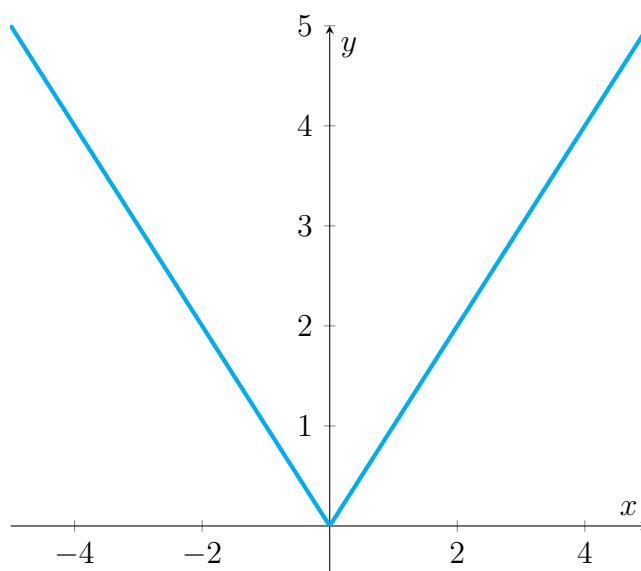
$$f(x) = |x|$$

I programvare vil vi ofte kunne skrive `abs(x)`.

Definisjonsmengden til funksjonen er $D_f = \mathbb{R}$. Når vi skal skrive funksjonsuttrykket til f må vi benytte en delt forskrift

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & 0 < x \end{cases}$$

Grafen til absoluttverdifunksjonen ser slik ut

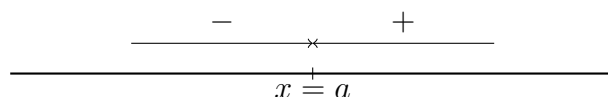


7.1 Ensidede grenseverdier

I teksten under blir det brukt noen nye symboler. De benyttes når vi skal finne det vi kaller *ensidede grenseverdier*.

Når vi skal finne en grenseverdi har vi "nærmet" oss en bestemt x -verdi. I boka står det ikke presisert, men vi kan "nærme" oss en verdi på to måter. Vi lar $x \rightarrow a$ (her står det x gå mot a). Det kan skje ved at:

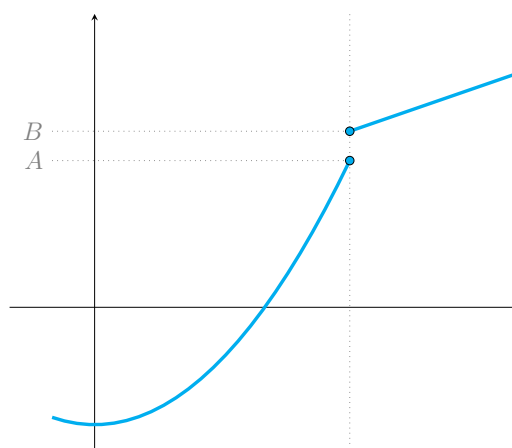
- x nærmer seg a fra undersiden
- x nærmer seg a fra oversiden



Matematisk skriver vi det slik:

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow a^- & x \text{ nærmer seg } a \text{ fra undersiden} \\ x \rightarrow a^+ & x \text{ nærmer seg } a \text{ fra oversiden} \end{array}$$

La oss se på et eksempel:



Her ser vi at $f(x) \rightarrow A$ når $x \rightarrow a^-$ og at $f(x) \rightarrow B$ når $x \rightarrow a^+$. Vi skriver det slik

$$\begin{array}{ll} f(x) \rightarrow B \text{ når } x \rightarrow a^- & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = B \\ f(x) \rightarrow A \text{ når } x \rightarrow a^+ & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \end{array}$$

For at $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ skal eksistere så må

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

7.2 Kontinuitet

En vanlig definisjon på kontinuitet kan være denne

Definisjon 11

En funksjon er kontinuerlig i et punkt a dersom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Denne definisjonen stiller tre krav

1. funksjonen må være definert for $x = a$
2. grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ må eksistere
3. grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ må være lik funksjonsverdien $f(a)$

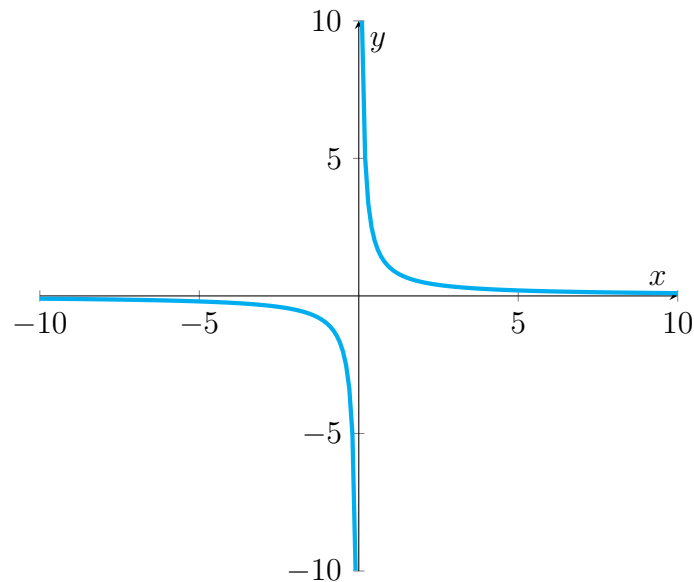
I dagligtale kan en uttrykke dette som at «grafene henger sammen», men for en matematiker er ikke dette godt nok! Vi må undersøke kravene over. Det er ikke nok å se på en graf, da kan vi bli lurt.

7.3 Noen eksempler

Oppgave 19

Undersøk om $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$ kontinuerlig for $x = 1$

La oss starte med å se på grafen til f



Grafen «ser» sammenhengende ut, men vi må undersøke de kriteriene for kontinuitet. Det første vi må undersøke er om $f(x)$ er definert for $x = 1$. Den rasjonale funksjonen har et bruddpunkt for $x = 1$ fordi nevneren blir lik null for den verdien. Da kan vi slå fast at funksjonen f ikke er definert for $x = 1$ og kriteriet er ikke oppfylt.

Svar: Funksjonen f er ikke er kontinuerlig for $x = 1$

Det første kriteriet er ikke oppfylt, men legg merke til at de andre kriteriene oppfylles.

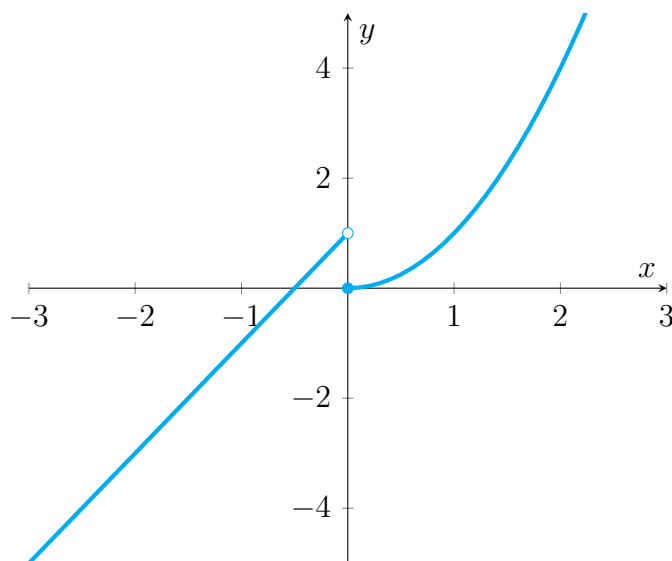
Oppgave 20

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Undersøk om f er kontinuerlig for $x = 0$

Vi starter med å tegne opp grafen



Her er det greit å se at grafen ikke henger sammen. En matematisk undersøkelse tar utgangspunkt i kriteriene som er satt for kontinuitet.

Vi starter derfor med å undersøke om f er definert for $x = 0$.

$$f(0) = 0$$

Funksjonen er definert for $x = 0$ og en funksjonsverdi eksisterer. Det neste vi må se på er om $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ eksisterer. For å finne ut det må vi undersøke de ensidige grenseverdiene

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ eksisterer ikke}$$

Kravet er ikke oppfylt og vi kan konkludere med at

Svar: Funksjonen er diskontinuerlig

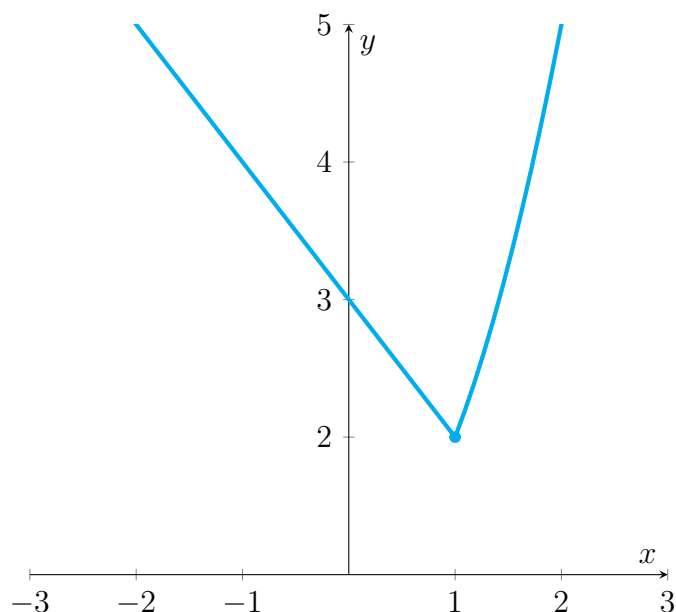
Oppgave 21

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 3 - x, & x < 1 \end{cases}$$

Undersøk om funksjonen er kontinuerlig for $x = 1$

Igjen starter vi med å tegne grafen til f



Ut fra grafen ser det ut til at funksjonen er kontinuert. Vi undersøker kriteriene for kontinuitet og starter med å undersøke om f er definert for $x = 1$. Av funksjonsuttrykket har vi gitt at funksjonen er definert og at

$$f(1) = 2$$

Så undersøker vi om $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ eksisterer

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Det siste kravet var at grenseverdien skulle være den samme som funksjonsverdien. Her ser vi at

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Svar: Alle kravene oppfylt og funksjonen er kontinuert i $x = 1$

La oss se på siste eksempel som tar utgangspunkt i en funksjon som likner på den siste.

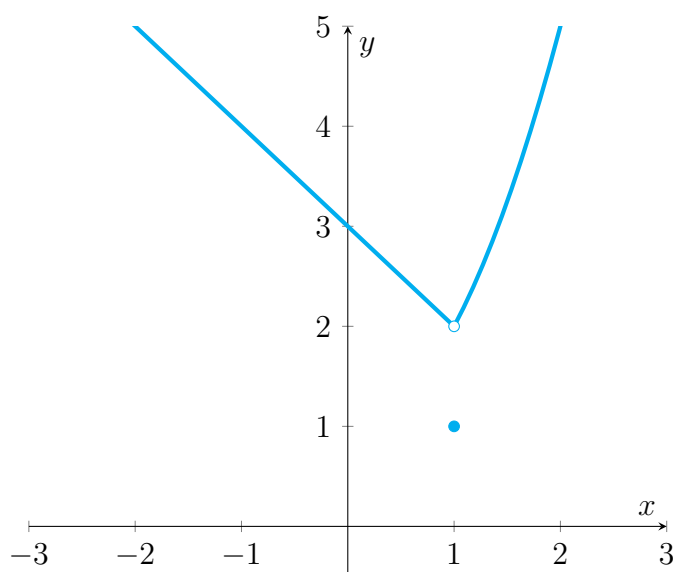
Oppgave 22

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ 3 - x, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Undersøk om funksjonen er kontinuertlig for $x = 1$

Her er grafen



Hva skiller denne oppgaven fra den over? Jo, $f(1) = 1$. Grenseverdiene blir de samme, men ett kriterium oppfylles ikke

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

Svar: Funksjonen er ikke kontinuertlig i $x = 1$



Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0

Laget med L^AT_EX