

Differenslikninger

Per G. Østerlie

6. mai 2019

1	Introduksjon	4
1.1	Hva er differenslikninger?	4
1.2	Et eksempel	4
1.3	Differenslikninger og verktøy	7
1.4	En del ord og uttrykk	7
1.5	Oppgaver	12
1.6	Modellering med differenslikninger	12
2	Aritmetisk vekst	15
2.1	Figurtall som viser aritmetisk vekst	15
2.2	Aritmetisk vekst beskrevet av differenslikninger	16
2.3	En eksplisitt formel for aritmetisk vekst	16
3	Kvadratisk vekst	19
3.1	Hva er kvadratisk vekst?	19
3.2	Differenslikning som beskriver kvadratisk vekst	19
3.3	Eksplisitt formel	20
3.4	Håndtrykkproblemet	23
3.5	Antall diagonaler i en mangekant	26
4	Geometrisk vekst	30
4.1	Geometrisk vekst	30
4.2	Eksponentiell vekst	32
5	Kombinasjonsvekst	44
5.1	En kombinasjon av aritmetisk og geometrisk vekst	44
5.2	Eksplisitt formel for kombinasjonsvekst	45
5.3	Konvergens og divergens	48
6	Logistisk vekst	52
6.1	Begrenset vekst	52
6.2	Logistisk vekst som differenslikning	53
6.3	Oppgave: SIR-modell	58
A	Aritmetiske rekker	60
A.1	Aritmetisk tallfølge	60
A.2	Aritmetisk rekke	60
A.3	Summen av ei aritmetisk rekke	60

B	Geometriske rekker	63
B.1	Geometriske tallfølger	63
B.2	Geometriske rekker	63
B.3	Summen av de n første leddene	64



Denne teksten er mer et utkast, eller en kladd, til et kompendium om differenslikninger. I håp om å kunne forbedre det som står her vil teksten oppdateres etter hvert. Legg derfor merke til datoen den er skrevet. Ser du noe som er uklart eller feil: Si fra!



En stor takk til min gode kollega Øistein Gjøvik for gode råd og innspill.

Teksten er skrevet med $\text{\LaTeX}$.



Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0 Internasjonal Offentlige Lisens

1 Introduksjon

1.1 Hva er differenslikninger?

Fra tidligere er vi vant med eksplisitte uttrykk som modeller. I skolematematikken starter ofte oppgaven med: En funksjon er gitt ved $f(x) = x^2 + 2$. Alternativet er at vi ved regresjon finner et funksjonsuttrykk. Det samme gjelder ofte for tallfølger. Kanskje tar vi utgangspunkt i et figurmønster for så å finne den eksplisitte formelen? Da ender vi opp med et eksplisitt uttrykk for ledd n . Har vi en eksplisitt formel er det greit å finne alle elementene i tallfølgen, men ved modellering kommer vi ofte opp i en situasjon hvor vi ikke har en eksplisitt formel og hvor det ofte ikke er så enkelt å finne den. Et rekursivt uttrykk kan ofte være enklere å finne i mange tilfeller. Da kan vi uttrykke et ledd i tallfølgen fra et annet. Det er det vi kaller for en *differenslikning*. Det skal vi se nærmere på, men la oss starte tallfølger og hva det er.

1.2 Et eksempel

Vi skal se på forbruk av klær og sko i Norge. Tabellen under viser utviklinga i millioner 2005-kroner. Data er henta fra [Statistisk sentralbyrå](#)

År	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Konsum	62054	67066	69356	71493	74222	76578	79824

Så langt kunne denne oppgaven vært fra ei lærebok i grunnskolen. Fortsettelsen ville vært at elevene skulle brukt dataene til en regresjonsanalyse og kommet fram til et eller annet funksjonsuttrykk. Det som da skjer er at elevene forflytter seg fra diskrete verdier gitt i en tabell til en kontinuerlig definert funksjon som en matematisk modell. Nå kan definisjonsmengden til funksjonen avgrenses til en diskret mengde, men ofte blir ikke det gjort. Når vi nå skal se på differenslikninger skal vi holde oss til de oppgitte verdiene og prøve å komme fram til en diskret modell som passer til verdiene.

Vi velger bokstaven K for konsumet. For å slippe å ha med så mange siffer setter vi året 2009 til år null. Da kan vi skrive forbruket av klær i 2009, 2010 og 2011 som

$$K_0 = 62054$$

$$K_1 = 67066$$

$$K_2 = 69356$$

Når vi skal lage en modell for konsumet av klær og sko kan én tilnærming være å se på forbruket i 2009 og se hvor mye det økte i det neste året.

$$k_0 = 62054$$

$$k_1 = 67066$$

$$k_1 - k_0 = 67066 - 62054 = 5012$$

La oss si at vi antar at forbruket vil øke med samme verdi i årene som kommer. Da har vi en modell som sier at vi kan legge til 5012 til konsumet ett år for å få konsumet året etter. Modellen blir da slik

$$k_{n+1} = k_n + 5012$$

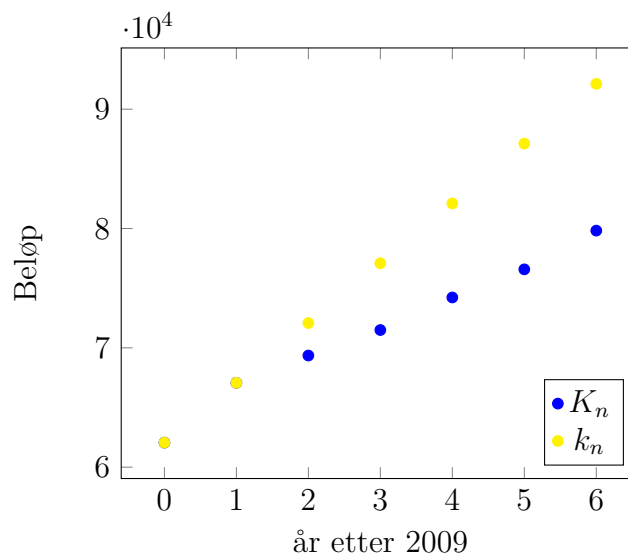
Her har vi valgt å kalle modellen vår og verdiene som den beskriver for k_n . De virkelige verdiene får da betegnelsen K_n . Nå kan vi sammenlikne modellen og verdiene vi har fått oppgitt

n	0	1	2	3	4	5	6
K_n	62054	67066	69356	71493	74222	76578	79824
k_n	62054	67066	72078	77090	82102	87114	92126

Ut fra tabellen kan vi se at modellen stemmer for de første verdiene, men så blir forskjellen ganske stor. Det samme kan vi se ved å tegne et punktplott, slik figur 1.1 viser.

Modellen vår er ikke så bra tilpassa virkeligheten. Den stemmer for de to første verdiene siden det var de vi tok utgangspunkt i, men den skiller seg fra virkeligheten for de andre. Nå ser vi at økningen i konsumet var størst det første året. Økningen de andre årene er langt lavere enn 5012. La oss prøve å omformulere modellen. Etter å tatt utgangspunkt i gjennomsnittet av alle økningene har jeg valgt å omformulere modellen til

$$k_{n+1} = k_n + 2961$$



Figur 1.1: En sammenlikning av data og modell

Lager vi samme tabell, ser vi at verdiene passer noe bedre.

n	0	1	2	3	4	5	6
K_n	62054	67066	69356	71493	74222	76578	79824
k_n	62054	65015	67976	70937	73898	76859	79820

Figur 1.2 viser verdiene fra den nye modellen og de opprinnelige dataene.

Modellen vår $k_{n+1} = k_n + 2961$ kan vi også skrive som

$$k_{n+1} - k_n = 2961$$

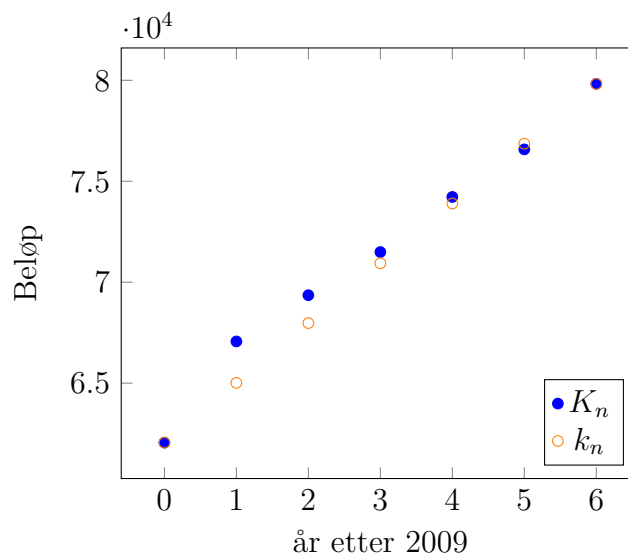
Her ser vi at forskjellen mellom ett ledd og det neste alltid er 2961. Veksten er konstant. Legg også merke til differansen har gitt opphavet til navnet *differenslikning*. Vi kan skrive modellen vår litt tydeligere på denne måten

Differenslikning som modell

K_n representerer konsumet av klær og sko i millioner 2005-kroner n år etter 2009. En modell for konsumet er gitt ved

$$k_n = k_{n-1} + 2961$$

hvor $k_0 = K_0$ og $n > 0$



Figur 1.2: Ny sammenlikning av data og modell

1.3 Differenslikninger og verktøy

Når vi arbeider med differenslikninger vil et regneark være til hjelp. Differenslikningene er rekursive og det er noe som passer regneark. Ved å skrive inn korrekt formel med referanse til forrige resultat i ei celle vil kopiering resultere i rekursivitet.

Flere kalkulatorer og programvare for matematikk tilbyr også å skrive inn rekursive formler direkte. Figur 1.3 viser rekursive definisjoner i WolframAlpha og TI-Nspire.

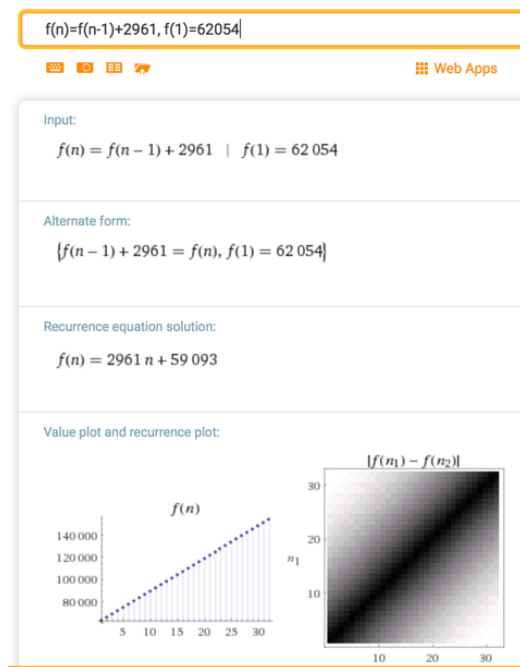
1.4 En del ord og uttrykk

Nå har vi sett på et praktisk eksempel og hvordan vi fant ei differenslikning som modellerte situasjonen. La oss se på noen definisjoner og forklaringer på matematiske uttrykk før vi går videre.

Tallfølger

Eksemplet vi startet inneholdt ei tallfølge for konsumet fra 2009 og framover. Tidligere framstilte vi det i en tabell, men vi kan også skrive verdiene slik

$$\{62054, 67066, 69356, 71493, 74222, 76578, 79824\}$$



(a) WolframAlpha

	A	B	C
1	62054		
2	65015		
3	67976		
4	70937		
5	73898		
6	76859		
7	79820		
8	82781		
9	85742		
10	88703		

(b) GeoGebra

Rekursive uttrykk kan defineres slik

Define $u(n) = \begin{cases} 62054, & n=0 \\ u(n-1) + 2961, & n>0 \end{cases}$ ▶ *Ferdig*

For å finne en verdi

$u(4)$ ▶ 73898

(c) TI-Nspire

Figur 1.3: Differenslikninger

Ei slik oppramsing kaller vi ei tallfølge.

Definisjon 1

Ei tallfølge er tall som står etter hverandre i en bestemt rekkefølge.

Ei enkel tallfølge er partallene fra og med to og opp til og med ti kan vi skrive som

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Det er ei endelig tallfølge med fem ledd

Ønsker vi en kortere skrivemåte er det vanlig å skrive denne som

$$\{2 \cdot n\}_0^5$$

Setter vi ikke den øvre grensa kan vi skriv alle partallene fra og med to som

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Det er ei uendelig tallfølge som kan skrives som

$$\{2 \cdot n\}_0^\infty$$

Definisjon 2

Ei tallfølge kan skrives som

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

Vi kaller tallene $a_0, a_1, a_2, \dots$ for leddene i tallfølga.
 a_n er det generelle, eller det n -te, leddet.

Hele tallfølga kan skrives som $\{a_n\}$

Her er det første leddet skrevet som a_0 . Indeksen viser at det er ledd nummer null. Det er også vanlig å beskrive det første leddet i tallfølgen som ledd nummer én, f.eks, a_1 eller f_1 eller u_1 . Vi skal se at det ikke spiller så stor rolle bare vi vet hva vi gjør. Når vi starter med null indikeres det at det er en initialbetingelse. a_0 .

Rekursiv formel

En rekursiv formel for et ledd i ei tallfølge tar utgangspunkt i ett, eller flere, foregående ledd for å beskrive det neste. I tilfellet vårt med den uendelige tallfølga av partall blir en rekursiv formel.

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

Da ser vi at det kan også gi oddetall eller andre følger med partall. Det første leddet må derfor oppgis, slik at den rekursive formelen blir

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

I det innledende eksemplet var det en rekursiv formel vi fant

$$k_{n+1} = k_n + 2961$$

Eksplisitt formel

Den eksplisitte formelen gir oss leddet direkte ut fra hvilket nummer det er i rekka.

$$a_n = 2 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eksplisitte formler er vi vant med fra funksjonsuttrykk. Tar vi utgangspunkt i det innledende eksemplet kan vi finne en eksplisitt formel. Vi starter med 62054 og legger til 2961 for hvert ledd og kan skrive om den rekursive formelen til

$$k_n = 62054 + 2961 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Her står $\mathbb{N}_0$ for alle de ikke-negative tallene: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Differenslikninger

Da er vi klare for å definere hva differenslikninger er

Definisjon 3

Ei differenslikning har ei tallfølge som løsning.

Leddene beregnes ut fra foregående ledd og et startledd.

Definisjon 4

Kaller vi antall foregående ledd som kreves i beregningen for k , der $k \in \mathbb{N}$ kalles differenslikninga for ei differenslikninga av orden k .

Definisjon 5

La $k \in \mathbb{N}$. Ei differenslikning av orden k er ei likning på formen

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} \cdots + a_k x_n + f(n), \quad n \geq 0$$

der $a_1, \dots, a_k$ er reelle tall, $f(n)$ er et gitt uttrykk i n og $a_k \neq 0$

I dette kurset skal vi bare se på lineære differenslikninger.

Fra før av kjenner vi lineære likninger som likninger på formen

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = c$$

Her er $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ konstanter. De kalles også koeffisienter til likninga. De ukjente er $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. I skolematematikken er det vanligste og benytte

forskjellige bokstaver for den ukjente slik at indekser unngås. Da kan lineære likninger se slik ut

$$\begin{aligned}2x &= 10 \\ 3x + 4y &= 24\end{aligned}$$

For at ei likning skal kalles lineær kan vi altså bare ha ledd hvor de ukjente er multiplisert med konstanter. Et eksempel på ei ikke-lineær likning er ei andregradslikning $k_1x_1^2 + k_2x_2 = c$. Her ser vi at den ene ukjente ikke bare er multiplisert med en konstant, men også med seg sjøl.

Vi skal holde oss til lineære differenslikninger og det betyr at de ukjente ikke vil være multiplisert med annet enn koeffisienter.

Definisjon 6

Ei lineær differenslikning kalles *homogen* hvis $f(n) = 0$. Hvis $f(n) \neq 0$ kalles den *inhomogen*

La oss se på noen eksempler som kan være oppklarende.

Eksempler på differenslikninger

Differenslikning	Type
$a_{n+1} = 5 \cdot a_n + 2n$	førsteordens inhomogen
$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 5 \cdot a_n + 2$	tredjeordens inhomogen
$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 5 \cdot a_n$	tredjeordens homogen

Løsningen av differenslikninger er tallfølger. Vi kommer til å se på forskjellige måter disse vokser. Da er vi interessert i forskjellen mellom leddene. Det kaller vi første-differenser.

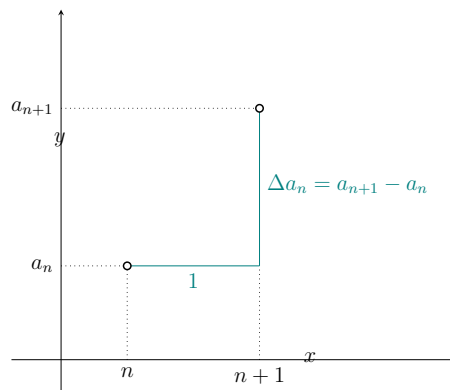
Definisjon 7

For ei tallfølge $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ er dette første-differensene

$$\begin{aligned}\Delta a_0 &= a_1 - a_0 \\ \Delta a_1 &= a_2 - a_1 \\ \Delta a_2 &= a_3 - a_2\end{aligned}$$

Lar vi $n \in \mathbb{N}_0$ kan den n-te førstedifferensen skrives som $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Figur 1.4 viser hvordan forandringen fra ledd til ledd framstilles grafisk.



Figur 1.4: Første-differense framstilt grafisk.

Definisjon 8

Et dynamisk system er relasjonen mellom elementene i en tallfølge.

1.5 Oppgaver

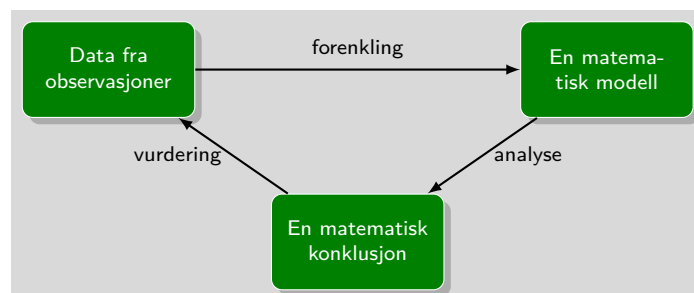
Oppgave 1

Finn differenslikninger for

- de positive partallene
- de positive oddetallene
- tallfølga $\{1, 4, 5, 9, 14, 23 \dots\}$
- tallfølga $\{1, 2, 6, 24, 120, 720 \dots\}$
- tallfølga $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots\}$

1.6 Modellering med differenslikninger

Tidligere har vi sett hvordan vi kan modellere virkeligheten. Vi ender opp med en matematisk modell som vi kan benytte til beregninger. Det kan gjøre oss i stand til å lage prognoser for hva som skal skje en gang i framtida, gjøre oss i stand til å vurdere lønnsomhet eller finne antall individer i en levedyktig populasjon. Den matematiske modellen gjør oss i stand til det, men det er viktig å huske at den er en forenkling av det vi ønsker å finne ut mer om. Vi må alltid vurdere konklusjonene opp mot det virkelige vi modellerer.



Differenslikninger kan benyttes til å lage modeller. Den differenslikninga vi kommer fram til skal søke å gi ei tallfølge som best mulig passer som en modell for situasjonen. Hva som er «best» kan være vanskelig å avgjøre i mange tilfeller. Ofte kan vi finne en modell som stemmer svært godt overens med dataene vi har målt, men den kan være usikker når det gjelder å si noe om framtidige verdier. Når vi arbeider med differenslikninger prøver vi å finne likninger som ser ut til å stemme overens med dataene vi har. Ofte ønsker vi å modellering forandring og ta utgangspunkt i

$$\text{framtidig verdi} = \text{nåverdi} + \text{forandring}$$

Det uttrykket kan vi også skrive om til

$$\text{forandring} = \text{framtidig verdi} - \text{nåverdi}$$

Ved å samle data over en periode og plote disse kan vi se hva som skjer med forandringen over tid. Siden vi da har samla enkeltverdier vil de utgjøre diskrete verdier. Vi har da differenslikninger. Seinere skal vi se på kontinuitet og da blir det differensiallikninger.

Vi skal nå forsøke å beskrive forandringen som en matematisk modell. Når vi observerer forandring er vi opptatt av hvordan forandringen skjer og analysere egenskapene til forandringen. Det hjelper en matematisk modell oss med.

Før vi gir oss ut på ukjent farvann kan det være greit å vite at differenslikninger egentlig er gammelt nytt. Se bare på denne oppgaven.

Oppgave 2

Du setter 1000 kr i banken til 1 % rente. Renta beregnes, og legges til, hver måned. Finn ei differenslikning som modellerer forandringen.

Her vil tallfølga bli

$$A = (1000, 1010, 1020.10, 1030.30, 1040.60, 1051.01, \dots)$$

Hvert ledd i tallfølga er gitt ved

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n \cdot 1}{100} = 1.01 \cdot a_n$$

Vi må ta med initialbetingelsen som sier at beløpet vi satte inn var 1000 kr for å skrive det som et dynamisk system

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1.01 \cdot a_n, & n &= 0, 1, 2, 3 \dots \\ a_0 &= 1000 \end{aligned}$$

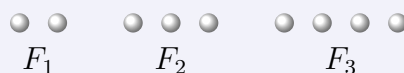
2 Aritmetisk vekst

2.1 Figurtall som viser aritmetisk vekst

Et eksempel på aritmetisk vekst finner vi hvis vi ser på vekst hvor økningen er konstant. Vi kan se på et enkelt eksempel gjennom denne oppgaven

Oppgave 3

Finn en rekursiv og en eksplisitt formel for antall prikker i figurtallene gitt ved disse figurene



Tar vi utgangspunkt i figurene kan vi se at den rekursive formelen er gitt ved

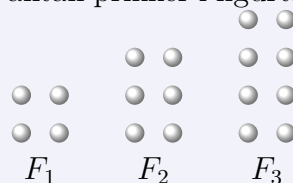
$$F_{n+1} = F_n + 1$$

Startverdien, eller initialverdien, er $F_1 = 2$. Fra den ene figuren til den andre øker antallet prikker med det samme, én prikk.

Vi tar med en oppgaven til for å illustrer det samme.

Oppgave 4

Finn en rekursiv formel for antall prikker i figurtallene gitt ved disse figurene



Her starter vi med $F_1 = 4$ og hver figur vokser med to prikker. Det gir den rekursive formelen

$$F_{n+1} = F_n + 2$$

Det gir tallfølga $\{4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ med en fast differanse mellom elementene. Det er et eksempel på aritmetisk vekst.

$$4 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{2} 8 \xrightarrow{2} 10 \quad \dots \quad F_{n-1} \xrightarrow{2} F_n$$

2.2 Aritmetisk vekst beskrevet av differenslikninger

Rekursivt kan aritmetisk vekst alltid beskrives ved denne generelle differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n + d$$

hvor d er den konstante veksten.

Ut fra definisjonene er det ei førsteordens (definisjon 5) inhomogen (definisjon 6) differenslikning.

2.3 En eksplisitt formel for aritmetisk vekst

Gjør først denne oppgaven

Oppgave 5

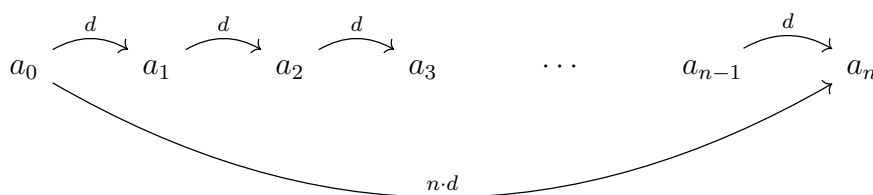
Finne en eksplisitt formel for samme figurmønster

Som ellers vil det være flere muligheter vi kan observere ut fra figurmønstret. Her er noen muligheter ut fra betraktninger av figurene.

$$\begin{aligned} F_n &= 2 \cdot (n + 1) \\ &= 4 + 2 \cdot (n - 1) \\ &= 2 \cdot n + 2 \end{aligned}$$

Dette var en eksplisitt formel for antall prikker i hver i akkurat dette tilfellet. Slike uttrykk kan vi også finne generelt.

Eksplisitte uttrykk for aritmetisk vekst kan vi komme fram til ved å se på hvordan leddene er bygd opp. For hvert ledd får vi et tillegg d . Da kan vi finne ledd n på denne måten.



Teorem 1

Hvis ei aritmetisk tallfølge er gitt ved

$$a_{n+1} = a_n + d$$

og a_0 som første ledd, er den eksplisitte formelen for et ledd i tallfølga

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

for $n \geq 1$

Bewis. Vi skriver ned hvert ledd og viser utviklingen

$$a_1 = a_0 + d$$

$$a_2 = a_1 + d = a_0 + d + d = a_0 + 2d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_0 + 2d + d = a_0 + 3d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + n \cdot d$$

Ved den siste generaliseringen ser vi den eksplisitte formelen. □

La oss prøve om det stemmer for det eksplisitte uttrykket vi fant. Der var $d = 2$. I oppgaven startet vi ikke med a_0 , men med F_1 . For å tilpasse til den generelle eksplisitte formelen må vi gjøre en liten justering

$$F_1 = a_0$$

$$F_2 = a_1$$

$$\vdots$$

$$F_n = a_{n-1}$$

Da får vi at

$$F_n = F_1 + d \cdot (n - 1) = 4 + 2 \cdot (n - 1)$$

Det stemmer bra og vi kan summere opp det vi har funnet.

Aritmetisk vekst

Differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n + d$$

hvor d er en konstant beskriver en aritmetisk vekst.

Den eksplisitte formelen blir da

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

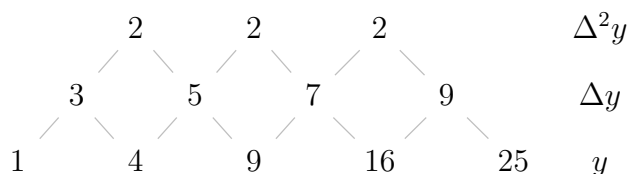
for $n \geq 1$

3 Kvadratisk vekst

3.1 Hva er kvadratisk vekst?

For kvadratisk vekst vil ikke veksten ikke konstant, men veksten vil vokse aritmetisk. La oss se på et eksempel gitt av tallfølga $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$. Du kjenner kanskje igjen den som noen av funksjonsverdiene til $y = x^2$

Tidligere har vi sett på førstedifferensen, men nå kan vi også innføre andredifferensen. Kaller vi førstedifferensen for Δy er det vanlig å kalle andredifferensen for $\Delta^2 y$. Her er det diagram som viser de to



Legg merke til at førstedifferensen følger et mønster av aritmetisk vekst. Andredifferensen er konstant.

3.2 Differenslikning som beskriver kvadratisk vekst

Nå skal vi se på en generell kvadratisk vekst. Kaller vi det første tillegget d_0 og andredifferense e kan vi sette det opp generelt slik

$$a_0 \xrightarrow{d_0} a_1 \xrightarrow{d_0+1 \cdot e} a_2 \xrightarrow{d_0+2 \cdot e} a_3 \quad \dots \quad a_{n-1} \xrightarrow{d_0+(n-1) \cdot e} a_n \xrightarrow{d_0+n \cdot e} a_{n+1}$$

Teorem 2

Hvis en kvadratisk vekst kan beskrives ved $d_0 = a_1 - a_0$ og e er andredifferensen vil differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n + d_0 + n \cdot e$$

med a_0 som første ledd, gi ei tallfølge som beskriver veksten

Bevis. Et resonnement basert basert på figuren over viser gyldigheten. $\square$

Rekursivt uttrykk for kvadratisk vekst er da gitt ved denne differenslikninga. Husk at d_0 og e er parametre. Her er d_0 gitt ved $a_1 - a_0$. Da er det viktig å holde på at a_0 er det første leddet og e er den konstante andredifferensen

Oppgave 6

Finn ei differenslikning som har

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

som løsning

Starter med å finne d_0

$$d_0 = a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3$$

Andredifferensen har vi allerede funnet

$$e = 2$$

Da har vi

$$a_{n+1} = a_n + d_0 + n \cdot e = a_n + 3 + 2 \cdot n$$

3.3 Eksplisitt formel

En eksplisitt formel kan vi finne når vi har den rekursive, altså differenslikninga. Når elever arbeider med figurtall må denne overgangen skje ved prøving og feiling, men nå skal vi se at det er mulig å finne et generelt uttrykk

Teorem 3

Hvis en kvadratisk vekst er gitt ved

$$a_{n+1} = a_n + d_0 + n \cdot e$$

med a_0 som første ledd, $d_0 = a_1 - a_0$ og e som andredifferensen, er den eksplisitte formelen for et ledd i tallfølga

$$a_n = a_0 + n \cdot d_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot e$$

for $n \geq 1$

Bevis. Vi følger samme resonnement som tidligere og ser på utviklinga. For å vise mønstret er leddene med e skrevet til venstre.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + d_0 \\ a_2 &= a_0 + d_0 + d_0 && +1 \cdot e \\ a_3 &= a_0 + d_0 + d_0 + d_0 && +1 \cdot e + 2 \cdot e \\ a_4 &= a_0 + d_0 + d_0 + d_0 + d_0 && +1 \cdot e + 2 \cdot e + 3 \cdot e \end{aligned}$$

Det kan vi skrive om som

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + d_0 \\ a_2 &= a_0 + 2 \cdot d_0 + 1 \cdot e \\ a_3 &= a_0 + 3 \cdot d_0 + (1 + 2) \cdot e \\ a_4 &= a_0 + 4 \cdot d_0 + (1 + 2 + 3) \cdot e \\ a_5 &= a_0 + 5 \cdot d_0 + (1 + 2 + 3 + 4) \cdot e \\ a_6 &= a_0 + 6 \cdot d_0 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot e \end{aligned}$$

Her kan vi observere at faktoren som e skal multipliseres med er summen av ei aritmetisk rekke som består av de $n - 1$ første naturlige tallene. Summen av ei aritmetisk rekke med k ledd er

$$S_k = \frac{k}{2} (l_1 + l_k)$$

Her er l_1 det første leddet og l_k ledd nummer k . I vårt tilfelle er $l_1 = 1$ og $l_k = n - 1$ og summen blir da

$$S_{n-1} = \frac{n-1}{2} (1 + (n-1)) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Da har vi det som skal til for å finne en eksplisitt formel

$$a_n = a_0 + n \cdot d_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot e$$

□

Da kan vi summere opp det vi har funnet for kvadratisk vekst.

Kvadratisk vekst

Differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n + d_0 + n \cdot e$$

hvor d_0 er $a_1 - a_0$ og e andredifferensen beskriver en kvadratisk vekst. Den eksplisitte formelen blir da

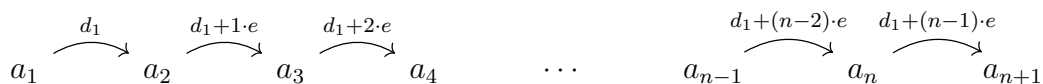
$$a_n = a_0 + n \cdot d_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot e$$

for $n \geq 1$

Hva om vi endrer første ledd?

I dette kompendiet har vi satt første ledd til a_0 . Det er i tråd med hvordan andre behandler differenslikninger. Det er ikke noe i veien for å starte med a_1 , men da vil noen av formlene forandre seg. Vi kan se på hva som skjer om vi forandrer på det.

La oss si at vi ønsker å starte med a_1 som første ledd. Hva skjer da? Jo, da blir $d_1 = a_2 - a_1$ og situasjonen kan illustreres slik



Med a_1 som første ledd kan kvadratisk vekst vil differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n + d_1 + (n-1) \cdot e$$

gi ei tallfølge som beskriver veksten

Valget av a_1 som første ledd får også konsekvenser for den eksplisitte formelen. La oss utlede den formelen også. Med a_1 som første ledd kan vi følge samme resonnement som tidligere.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d_1 \\
a_3 &= a_1 + d_1 + d_1 && +1 \cdot e \\
a_4 &= a_1 + d_1 + d_1 + d_1 && +1 \cdot e + 2 \cdot e \\
a_5 &= a_1 + d_1 + d_1 + d_1 + d_1 && +1 \cdot e + 2 \cdot e + 3 \cdot e
\end{aligned}$$

Det kan vi skrive om som

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d_1 \\
a_3 &= a_1 + 2 \cdot d_1 + 1 \cdot e \\
a_4 &= a_1 + 3 \cdot d_1 + (1 + 2) \cdot e \\
a_5 &= a_1 + 4 \cdot d_1 + (1 + 2 + 3) \cdot e \\
a_6 &= a_1 + 5 \cdot d_1 + (1 + 2 + 3 + 4) \cdot e \\
a_7 &= a_1 + 6 \cdot d_1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot e
\end{aligned}$$

Nå er faktoren som e skal multipliseres med summen av ei aritmetisk rekke som består av de $n - 2$ første naturlige tallene. Da får vi

$$S_{n-2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

Da kan vi finne den eksplisitte formelen som

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d_1 + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \cdot e$$

for $n \geq 2$.

3.4 Håndtrykkproblemet

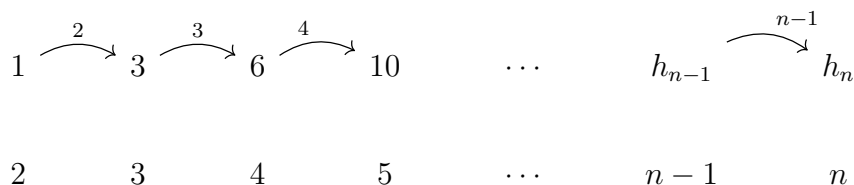
Oppgave 7

Hvor mange håndtrykk blir det i et selskap med n personer?

Her kommer håndtrykkene igjen. Denne gangen som et eksempel på kvadratisk vekst. La oss sette opp tabellen for hvor mange håndtrykk det blir når noen personer møtes.

Antall personer	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antall håndtrykk	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Her kan vi observere at kommer det én person til vil antallet håndtrykk øke med det forrige antall personer.



Det kan vi argumentere for ved å tenke oss at det er tretti personer i et selskap. Det kommer én person til og den personen må da håndhilse på alle de tretti personene. Benytter vi h for håndtrykk kan vi skrive det som

$$h_{31} = h_{30} + 30$$

Den samme tankegangen gjelder for alle leddene og vi skrive det generelt som differenslikninger. Under er det to varianter avhengig av hvilket ledd vi starter med

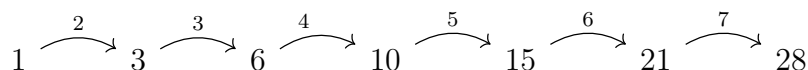
$$h_n = h_{n-1} + (n-1) \quad (3.1)$$

$$h_{n+1} = h_n + n \quad (3.2)$$

Nå vet vi at en generell kvadratisk vekst kan skrives eksplisitt som

$$h_{n+1} = h_n + d_0 + n \cdot e$$

La oss se mer på hva som skjuler seg i dette eksemplet og hvordan vi kan finne uttrykket vi fant over ved å se på differensene. Ser vi på førstedifferensen Δh kan vi observere at den vokser aritmetisk



Det er typisk for kvadratisk vekst. Andredifferensen $\Delta^2 h$ er konstant

$$2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 7$$

Det er igjen et kjennetegn på at dette er kvadratisk vekst og at det eksplisitte uttrykket kan skrives som

$$h_{n+1} = h_n + d_0 + n \cdot e$$

Vi har allerede resonnert oss fram til det, men her er det vist at

$$\Delta^2 h = e = 1$$

Nå vet vi fra tidligere at $d_0 = h_1 - h_0$, så da gjelder det å finne ut hva h_0 og h_1 er. Ingen, eller én, person betyr at det ikke blir noen håndtrykk. Det er ingen andre å hilse på. Vi kan ikke alltid betrakte situasjonen i jakten på d_0 . I dette tilfellet har vi starta med at to personer håndhilser og antall håndtrykk er h_2 . Vi kan allikevel finne d_0 ved å se på det teoretisk. Fortsetter vi bakover i tallfølgen får vi denne situasjonen:

$$\begin{array}{ccccccccc} h_0 & \xrightarrow{0} & h_1 & \xrightarrow{1} & h_2 & \xrightarrow{2} & h_3 & \xrightarrow{3} & h_4 \\ & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 \end{array}$$

Da kan vi bestemme $d_0 = h_1 - h_0 = 0$ og vi vet at $e = 1$. Vi har da formelen

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= h_n + d_0 + n \cdot e \\ &= h_n + n \end{aligned}$$

Når vi vet at $d_0 = 0$ og $e = 1$ kan vi også finne den eksplisitte formelen

$$\begin{aligned} h_n &= h_0 + n \cdot d_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot e \\ &= 0 + n \cdot 0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{aligned}$$

Skrevet som et funksjonsuttrykk er det gjenkjennelig fra tidligere arbeid med hånstrykksproblemet

$$h(n) = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Tar vi utgangspunkt i h_1 har vi at

$$d_1 = h_2 - h_1 = 1$$

Andredifferensen er den samme: $e = 1$

Da blir differenslikninga

$$h_{n+1} = h_n + 1 + (n - 1) = h_n + n$$

Vi kan også finne den eksplisitte formelen på denne måten.

$$\begin{aligned} h_n &= h_1 + (n - 1) \cdot d_1 + \frac{(n - 1) \cdot (n - 2)}{2} \cdot e \\ &= (n - 1) \cdot 1 + \frac{(n - 1) \cdot (n - 2)}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{2(n - 1) + (n - 1) \cdot (n - 2)}{2} \\ &= \frac{2n - 2 + n^2 - n - 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \end{aligned}$$

Legg merke til at håndtrykkproblemet er analogt med flere problemer med nettverk. Generelt gjelder det hvor mange forbindelseslinjer må vi ha mellom punkter. Da kan punktene være personer, datamaskiner eller byer.

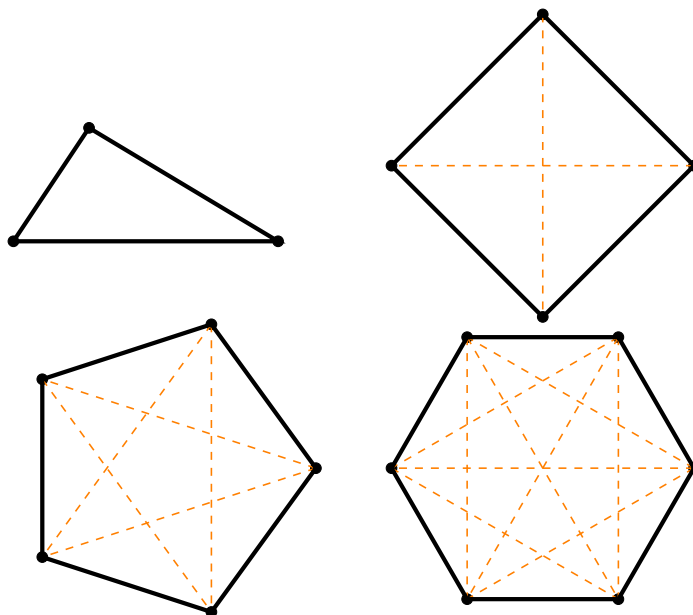
3.5 Antall diagonaler i en mangekant

Et eksempel som likner er denne oppgaven.

Oppgave 8

Finne en eksplisitt formel for sammenhengen mellom antall hjørner i en mangekant og antall diagonaler i samme mangekant

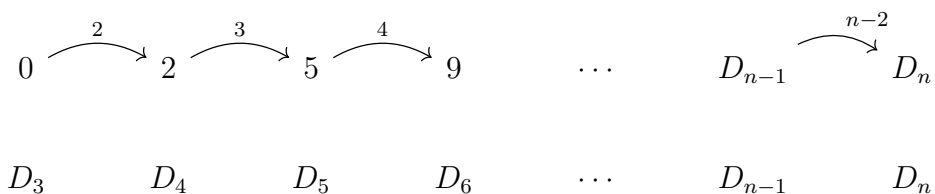
Det er naturlig å starte med å tegne noen figurer.



Resultatet kan settes opp i en tabell

Antall hjørner	Antall diagonaler
3	0
4	2
5	5
6	9
9	27
10	35
11	44
12	54
13	65

Opplysningene i tabellen forteller oss at førstedifferensen øker lineært på denne måten



Her ser vi at

$$\begin{aligned}
D_4 &= D_3 + 2 \\
D_5 &= D_4 + 3 \\
D_6 &= D_5 + 4 \\
&\vdots \\
D_n &= D_{n-1} + n - 2
\end{aligned}$$

Det gir oss en versjon av en rekursiv formel

$$D_n = D_{n-1} + n - 2$$

La oss finne en eksplisitt formel. Vi vet at dette er et eksempel på kvadratisk vekst. Da kan den eksplisitte formelen finnes ved

$$D_n = D_{n-1} + d_0 + (n-1) \cdot e$$

Nå må vi bare finne d_0 og e . Andredifferensen er grei å finne ut fra det vi har satt opp tidligere: $e = 1$.

Nå gjenstår det å finne d_0 . For å gjøre det må vi gå bakover i tallfølge og fjerne oss fra det praktiske tilfellet med diagonalen.

$$\begin{array}{ccccccc}
D_0 & \xrightarrow{-1} & D_1 & \xrightarrow{0} & D_2 & \xrightarrow{1} & D_3 & \xrightarrow{2} & D_4 \\
0 & & -1 & & -1 & & 0 & & 2
\end{array}$$

Nå kan vi se at $d_0 = -1$

Den eksplisitte formelen er gitt ved

$$D_n = D_0 + n \cdot d_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot e$$

Da kan vi sette inn og vi får

$$\begin{aligned}
D_n &= 0 + n \cdot (-1) + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{-2n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n - 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}
\end{aligned}$$

Da har vi funnet en eksplisitt formel

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Rekursiv formel

$$D_n = D_{n-1} + n - 2$$

For begge gjelder at $n \geq 3$ og at $D_3 = 0$

4 Geometrisk vekst

4.1 Geometrisk vekst

Geometrisk vekst er en type vekst du nok er kjent med fra før. Den er alltid gitt ved differenslikninger på formen $s_{n+1} = r \cdot s_n$. Vi kan definere slike differenslikninger mer presist slik

Definisjon 9

Ei differenslikning som modellerer geometrisk vekst er ei første ordens lineær homogen differenslikning som kan skrives på formen

$$a_{n+1} = r \cdot a_n, \quad n \geq 0$$

der $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Løser vi ei slik differenslikning vil vi få ei geometrisk tallfølge.

Et eksempel er denne differenslikninga

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \quad n \geq 0$$

Avhengig av initialverdier har den flere løsninger

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16 \dots\} \text{ hvis } a_0 = 1$$

$$A = \{4, 8, 16, 32, 64 \dots\} \text{ hvis } a_0 = 4$$

$$A = \{10, 20, 40, 80, \dots\} \text{ hvis } a_0 = 10$$

$$A = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots\} \text{ hvis } a_0 = \frac{1}{6}$$

$$A = \{0, 0, 0, \dots\} \text{ hvis } a_0 = 0$$

Vi kan starte med et eksempel du kjenner igjen.

Renteberegning

Rentesrente er et eksempel på geometrisk vekst. Gjør denne oppgaven.

Oppgave 9

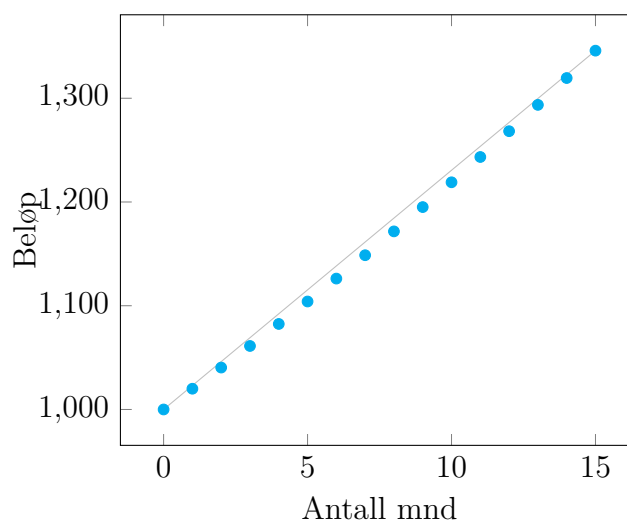
Du setter 1000 kr i banken til 2 % rente. Renta beregnes hver måned og legges til kontoen. Finn ei differenslikning som viser hvor mange penger det er i banken ved slutten av hver måned.

Ei tallfølgen som gir verdiene i banken etter hver måned er gitt ved

$$a_{n+1} = 1.02 \cdot a_n, \quad a_0 = 1000, \quad n \geq 0$$

Skriver vi de første leddene i en tabell og tegner en plotdiagram, vil de se slik ut

n	a_n
0	1000
1	1020,00
2	1040,40
3	1061,21
4	1082,43
5	1104,08
6	1126,16
7	1148,69
8	1171,66
9	1195,09
10	1218,99
11	1243,37
12	1268,24
13	1293,61
14	1319,48
15	1345,87



I grafen er det også lagt inn ei rett linje for å vise at veksten ikke er aritmetisk. For geometrisk vekst er ikke veksten hver måned den samme. Veksten er en faktor, en del, av forrige måneds beløp. I dette tilfellet er det slik at for hver måned vokser beløpet med en viss prosent. Slik er det med all geometrisk vekst. Den øker, eller minker, med samme faktor for hvert ledd.

Oppgave 10

Er denne tallfølga et eksempel på geometrisk vekst?

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots\right\}$$

Finn i så fall ei differenslikning som har denne tallfølga som løsning.

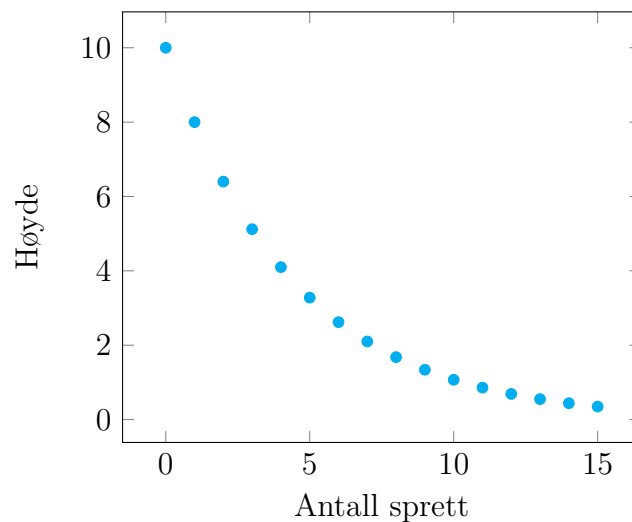
Oppgave 11

En ball slippes fra 10 meters høyde. Den spretter alltid opp til 80% av forrige høyde. Vi lar den sprette til den ligger stille. Finn ei differenslikning som modellerer hvor høgt den spretter.

Dette er et eksempel på geometrisk vekst hvor $a_0 = 10$ og $r = 0.8$. Da blir differenslikninga

$$a_{n+1} = 0.8 \cdot a_n$$

n	a_n
0	10.00
1	8.00
2	6.40
3	5.12
4	4.10
5	3.28
6	2.62
7	2.10
8	1.68
9	1.34
10	1.07
11	0.86
12	0.69
13	0.55
14	0.44
15	0.35



4.2 Eksponentiell vekst

Vi har sett at ei differenslikning for geometrisk vekst kan skrives generelt som

$$a_{n+1} = r \cdot a_n$$

Nå skal vi finne et eksplisitt uttrykk for denne veksten.

Teorem 4

Den generelle løsningen til ei differenslikning på formen

$$a_{n+1} = r \cdot a_n, \quad n \geq 0$$

er alle tallfølgerne

$$a_n = a_0 \cdot r^n, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad r \neq 0$$

Bevis. Vi starter med å se på de første leddene for så å trekke en konklusjon. Ut fra definisjonen har vi

$$a_1 = a_0 \cdot r$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = a_0 \cdot r \cdot r = a_0 \cdot r^2$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_0 \cdot r^3$$

$\vdots$

$$a_n = a_0 \cdot r^n$$

I tilfellet hvor r er en konstant vil det eksplisitte uttrykket være

$$a_n = a_0 \cdot r^n$$

□

Det betyr at vi kan finne løsninga på ei differenslikning for geometrisk vekst med den eksplisitte formelen. Element n i tallfølgen er $a_n = r^n \cdot a_0$. Siden a_0 kan være et hvilket som helst tall er det uendelig mange løsninger.

Legg også merke til hvordan vi kan skrive om den eksplisitte formelen for andre startverdier enn a_0 . Følger vi samme utledning som i beviset kan vi observere at hvis $k \geq 0$ så vil en omskriving gi

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

Funksjoner av typen $f(n) = a_0 \cdot r^n$ kaller vi eksponentialfunksjoner. De er ofte kontinuerlige modeller og krever at eksponenten er definert for $n \in \mathbb{R}$. For å ta steget fra differenslikninger til eksponentialfunksjoner kreves en definisjon

av potenser hvor eksponenten er reelle tall. Det kan være et stort steg å ta for mange elever siden det bryter med tidligere definisjoner hvor potenser er gjentatte multiplikasjoner med seg sjøl.

Ekspontiell vekst benyttes enten synonymt med geometrisk vekst eller for kontinuerlig geometrisk vekst. En kan finne begge definisjoner ved et søk på nettet.

La oss se på en oppgaven hvor vi må løse ei slik likning.

Oppgave 12

Du setter 1000 kr i banken til 1 % rente. Renta beregnes hver måned og settes inn på kontoen. Hvor mange måneder må pengene stå i banken før du har 2000 kr i banken?

Tallfølga som gir verdiene vi har i banken etter hver måned er gitt ved differenslikninga

$$a_{n+1} = 1.01 \cdot a_n, \quad n \geq 0$$

Det er ei første ordens lineær homogen differenslikning og nå vet vi at den har den generelle løsningen $a_n = C \cdot r^n$, $C \in \mathbb{R}$. Ut fra oppgaven som sier at beløpet vokser med 1 % hver måned er vekstfaktoren 1.01. Nå er $a_0 = C = 1000$

$$1000 \cdot 1.01^n = 2000$$

$$1.01^n = 2$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.01} = 69.661$$

Når $n = 69$ vil beløpet bli 1986.89, så det må få stå én måned til slik at det blir til 2006.76. Svaret blir at beløpet må stå i 70 måneder.

Geometrisk vekst

Differenslikninga

$$a_{n+1} = r \cdot a_n$$

hvor r er en konstant beskriver en geometrisk vekst.

Den eksplisitte likninga blir da

$$a_n = a_0 \cdot r^n$$

for $n \geq 1$

Oppgave 13

Sierpinski-trekanter kan du lese mer om på [Wikipedia](#). Under ser du de fire første.



Vi kaller antall svarte trekanter i hver av Sierpinski-trekantene for T_1 , T_2, T_3 og T_4 .

- Finn T_1 , T_2, T_3 og T_4
- Finn ei differenslikning for antall svarte trekanter i figur T_{n+1}
- Finn en eksplisitt formel for T_n

Oppgave 14

Antall registrerte elbiler i Norge henta fra Statistikkbanken til Statistisk sentralbyrå (SSB). Se: <http://www.ssb.no>. Her er et utdrag som viser antall registrerte biler.

2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
1693	1776	2068	3909	8031	17770	38652	69134

For enkelhet skyld setter benytter vi variabelen t for år etter 2008, slik at $t = 0$ tilsvarer 2008. Dataene er plottet i figur 4.1.

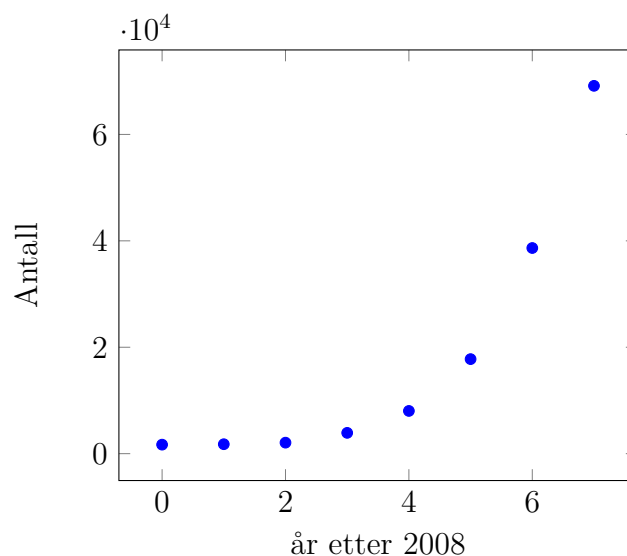
Finn ei differenslikning som kan modellere antall elbiler.

Konvergens av løsninger

Vi har tidligere sett at vi kan komme fram til en eksplisitt formel for en geometrisk vekst

$$a_n = a_0 r^n$$

I dette uttrykket var a_0 initialverdien. For å ikke ta utgangspunkt i at $n = 0$ innfører vi heller en verdi C som er uavhengig av den spesielle startverdien. Da kan vi skrive den generelle løsninga.



Figur 4.1: Antall registrerte elbiler i Norge

Teorem 5

Den generelle løsningen til en lineær førsteordens homogen differenslikning

$$a_{n+1} = ra_n$$

er tallfølgene

$$a_n = Cr^n, C \in \mathbb{R}$$

I det tilfellet at $C = a_0$ får vi en spesiell løsning.

Når vi undersøker hva som skjer med tallfølgene når n går mot uendelig vil vi enten ende opp med at tallfølgene konverger mot en bestemt verdi eller de vil divergere. Hva som skjer er avhengig av verdiene til C og r .

Det vi ønsker å finne ut av er hva som skjer med grenseverdiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Cr^n$$

Her må vi anta at $C \neq 0$. Hvis $C = 0$ vil vi få tallfølgen $\{0, 0, 0, \dots\}$. For ei generell lineær førsteordens homogen differenslikning $a_{n+1} = ra_n$ med løsningene gitt ved

$$a_n = Cr^n, C \in \mathbb{R}$$

vil tallfølgene konvergere eller divergere avhengig av verdien til r slik

verdien til r	hva skjer?
$ r < 1$	konvergerer mot 0
$ r > 1$	divergerer
$r = 1$	konvergerer mot C
$r = -1$	divergerer

Likevekstverdi

Konvergens og divergens er uttrykk knytta til matematikken. Ser vi på hva uttrykkene betyr for en vekstmodell vil de avgjøre hva som skjer. Vil verdiene oscillerer eller vil de stabilisere seg? Konvergens vil si at vi til slutt vil nå en stabil verdi. Den kan vi kalle likevektsverdien. Ved divergens vil vi få verdier som oscillerer.

For ei generell lineær førsteordens homogen differenslikning $a_{n+1} = ra_n$ med løsningene gitt ved

$$a_n = Cr^n, C \in \mathbb{R}$$

vil tallfølgene konvergere eller divergere avhengig av verdien til r . Ved konvergens vil verdiene gå mot en likevektsverdi.

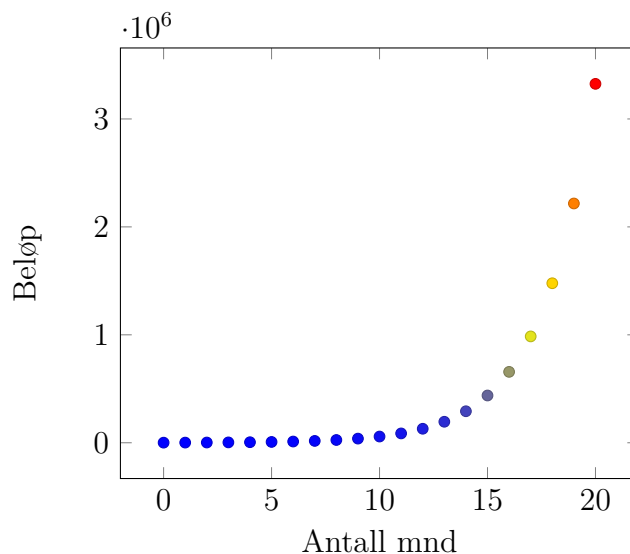
Verdien av r er viktig. Hvis $r = 0$ vil alle verdiene være lik null. Hvis $r = 1$ får vi ei tallfølge med like ledd.

Hva skjer med veksten?

For ei generell lineær førsteordens homogen differenslikning $a_{n+1} = ra_n$ vil verdien til r avgjøre hva som skjer i det lange løp.

verdien til r	hva skjer?
$r = 0$	null er konstant løsning
$r = 1$	a_0 er konstant løsning
$r < 0$	oscillering
$ r < 1$	avtar mot 0
$ r > 1$	vekst uten grenser

n	a_n
0	1000
1	1500
2	2250
3	3375
4	5063
5	7594
6	11391
7	17086
8	25629
9	38443
10	57665
11	86498
12	129746
13	194620
14	291929
15	437894



Figur 4.2: Differenslikninga $a_{n+1} = a_n \cdot 1.5$, $a_0 = 1000$

Eksempel: Eksperimentering

Eksempel 2.1

Vi tenke oss drømmesituasjonen hvor vi får 50 % rente hver måned. Vi setter inn 1000 kr i banken. Hva skjer med pengene over tid.

Vi kjenner igjen denne situasjonen som en geometrisk vekst med modellen hvor $r = 1.5$ og $a_0 = 1000$ og vi har differenslikninga

$$a_{n+1} = a_n \cdot 1.5 \quad , a_0 = 1000$$

Lager vi en tabell og tegner et punktplot kan det framstilles som i figur 4.2.

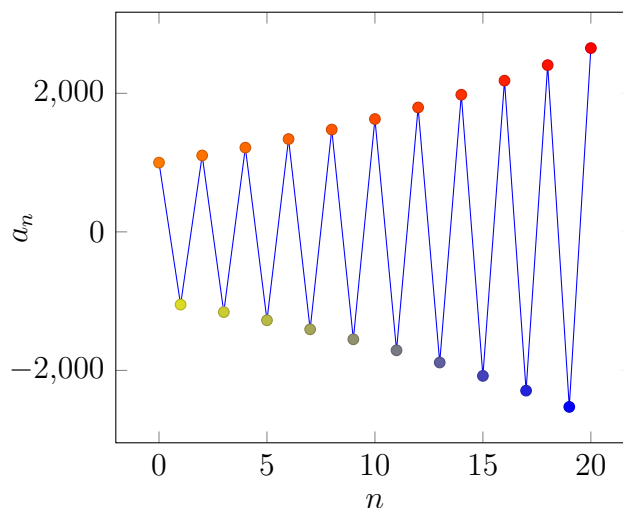
Oppgave 15

Ta utgangspunkt i differenslikninga

$$a_{n+1} = r a_n$$

Lag et regneark hvor det er mulig å skrive inn r i ei celle. Eksperimenter med forskjellige verdier av r . Hva skjer?

n	a_n
0	1000
1	-1050
2	1103
3	-1158
4	1216
5	-1276
6	1340
7	-1407
8	1477
9	-1551
10	1629
11	-1710
12	1796
13	-1886
14	1980
15	-2079



Figur 4.3: Differenslikninga $a_{n+1} = a_n \cdot (-1.05)$, $a_0 = 1000$

I eksemplet er $r = 1.5$ og veksten vil ikke gå mot en likevektsverdi. Den divergerer og vil fortsette å vokse uten grenser. Med litt eksperimentering oppdaget du kanskje at det ikke alltid er tilfelle?

La oss forlate det praktiske eksemplet og se på hva litt eksperimentering med samme likning kan føre til. Vi justerer r slik at $r < -1$ ved å sette $r = -1.05$. Resultatet i form av tabell og plot kan du se i figur 4.3.

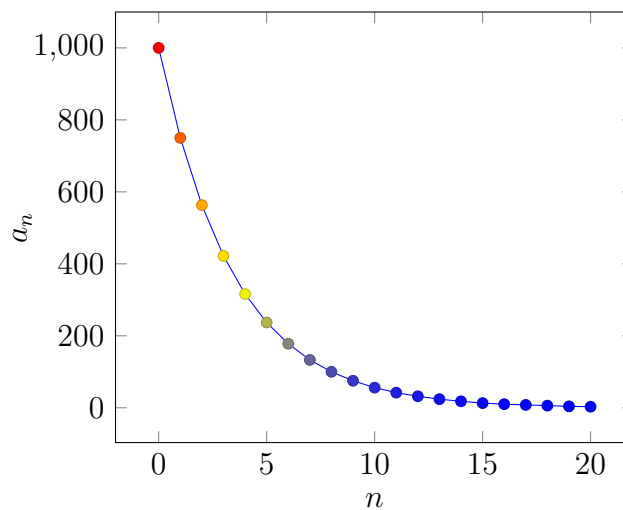
Som vi ser av figure 4.3 vil verdiene veksle mellom positive og negative verdier og forskjellen mellom to påfølgende verdier blir større og større.

Vi prøver oss også med at $|r| < 1$ og setter $r = 0.75$. Result vises i figur 4.4. Leddene i tallfølga gir minkende verdier.

Vi avslutter eksperimenteringa ved å sette $r = -0.75$ og studerer resultatet i figur 4.5.

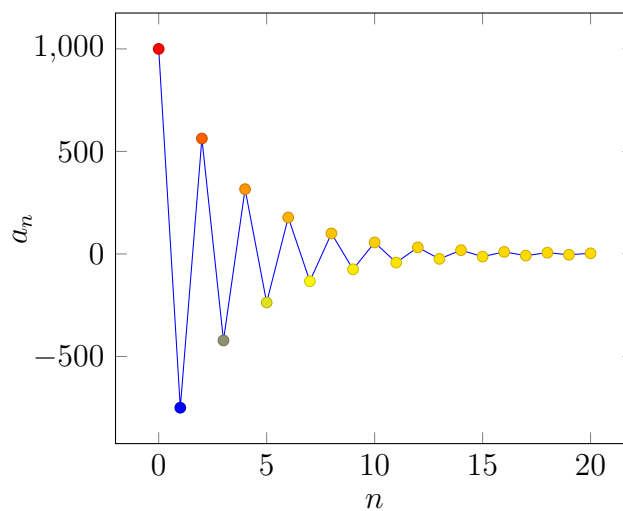
Konklusjonen er at r er bestemmende for om tallfølgene konvergerer eller divergerer og om de oscillerer. Eksperimentet utføres nok best med programvare som regneark eller f. eks. GeoGebra. Da er det mulig å justere verdien for r og interaktivt se hva som skjer.

n	a_n
0	1000
1	750
2	563
3	422
4	316
5	237
6	178
7	133
8	100
9	75
10	56
11	42
12	32
13	24
14	18
15	13



Figur 4.4: Differenslikninga $a_{n+1} = a_n \cdot 0.75$, $a_0 = 1000$

n	a_n
0	1000
1	-750
2	563
3	-422
4	316
5	-237
6	178
7	-133
8	100
9	-75
10	56
11	-42
12	32
13	-24
14	18
15	-13



Figur 4.5: Differenslikninga $a_{n+1} = a_n \cdot (-0.75)$, $a_0 = 1000$

Eksempel: Eksponentiell populasjonsvekst

En populasjon kan vokse eksponentielt over en kort periode, men etter hvert vil flere faktorer begrense denne veksten. Da vil veksten være logistisk. Før vi kommer dit ser vi på en et eksempel med populasjonsvekst uten begrensninger. En populasjon er individer av samme art på et avgrensa område. Vi tenker oss i denne omgang at antall individer i populasjonen er bestemt av hvor mange som fødes og hvor mange som dør. Vi benytter disse variablene

N_{t+1} størrelsen av den nye populasjonen

N_t størrelsen av den gamle populasjonen

b fødselsraten

d dødsraten

Da kan vi finne ei differenslikning for størrelsen

$$N_{t+1} = N_t + bN_t - dN_t$$

$$N_{t+1} = N_t + (b - d)N_t$$

$$N_{t+1} = N_t + rN_t$$

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t$$

$$N_{t+1} = \lambda N_t$$

Vi setter differensen mellom fødselsraten og dødsraten, $\lambda = 2.1$ og ser hva modellen gir. Figur 4.6 viser resultatet.

Eksempel: Hvor mange stingsild?

Eksempel 2.2

I et vann er det en populasjon av trepigga stingsild *Gasterosteus aculeatus*. Vi tenker oss at populasjonen er regulert ved hvor mange avkom hver hunn får.

Hvor mange avkom må hver hunn produsere for at populasjonen skal overleve

Vi starter med å innføre noen variabler

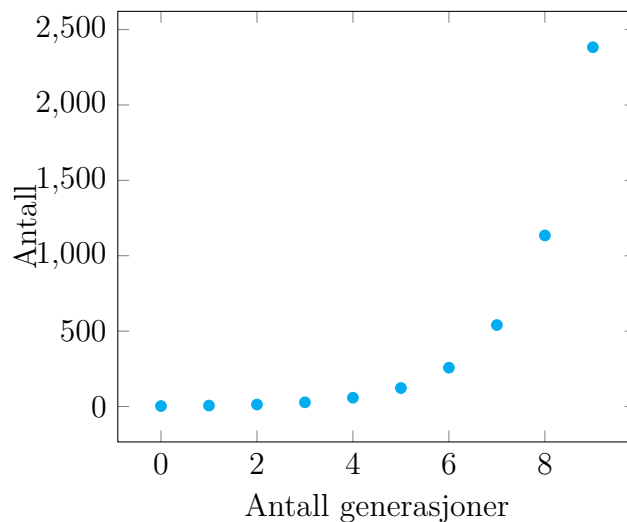
a_n antall voksne hunnfisker i generasjon n

g_n totalt antall avkom i generasjon n i populasjonen

d andel av avkom som dør

h andel hunnkjønn av den voksne populasjonen

t	N_t
0	3.00
1	6.30
2	13.23
3	27.78
4	58.34
5	122.52
6	257.30
7	540.33
8	1134.69
9	2382.84



Figur 4.6: Eksponentiell populasjonsvekst

r antall avkom per hunnkjønn

Den delen som overlever vil være $1 - d$. Antall hunnkjønn i generasjon $n + 1$ er da

$$a_{n+1} = h(1 - d)g_{n+1}$$

Vi må finne et uttrykk for g_{n+1} og har at

$$g_{n+1} = ra_n$$

Setter inn og får

$$a_{n+1} = h(1 - d)ra_n$$

Det er ei første ordens lineær homogen differenslikning med løsning

$$a_n = a_0 \cdot (h(1 - d)r)^n$$

Ut fra det vi har sett på vet vi at hvis de skal overleve så må

$$h(1 - d)r > 1$$

Antall avkom per hunnkjønn må oppfylle

$$r > \frac{1}{h(1-d)}$$

Nå må gjøre noen antakelser for populasjonen og vi kan anta at 80% av avkommene dør. Andelen hunnkjønn i populasjonen setter vi til 50%. Da har vi at $h = 0.5$ og $1 - d = 0.2$

$$r > \frac{1}{0.5 \cdot 0.2} = 100$$

Hvert hunnkjønn må produsere minst 100 avkom for at populasjonen skal overleve.

5 Kombinasjonsvekst

5.1 En kombinasjon av aritmetisk og geometrisk vekst

En kombinasjon av aritmetisk og geometrisk vekst skjuler seg under uttrykket kombinasjonsvekst. I engelsk litteratur kalles en modell for det en «mixed model».

Definisjon 10

En kombinasjonsvekst vil være gitt ved ei førsteordens lineær inhomogen differenslikning av typen

$$a_{n+1} = ra_n + d$$

Da er både r og d konstanter.

Det er kanskje greit å starte med et eksempel på noe kjent. Prøv denne oppgaven før du leser videre.

Oppgave 16

I starten av en måned oppretter du en sparekonto og setter inn 500 kr. Samtidig oppretter du en avtale hvor du setter inn 1000 kr i slutten av hver måned. Rentesatsen er 2% per måned. Finn ei differenslikning som viser hvor mye du har på kontoen ved slutten av hver måned.

Oppgaven gir et eksempel på en vekst som kombinerer et fast bidrag på 1000 kr hver måned samtidig som hvert ledd vokser med en faktor multiplisert med forrige ledd. Her får vi en kombinasjonsvekst med $d = 1000$ og $r = 1.02$ og differenslikninga bør bli

$$\begin{aligned}a_n &= 1.02 \cdot a_{n-1} + 1000 \\a_0 &= 500\end{aligned}$$

Løsningen vil være tallfølga som viser hva som står på kontoen etter hver måned.

5.2 Eksplisitt formel for kombinasjonsvekst

En eksplisitt formel kan vi finne ut fra den generelle differenslikninga for kombinasjonsvekst.

Teorem 6

Differenslikninga

$$a_{n+1} = ra_n + d$$

hvor r og d er konstanter beskriver en kombinasjon av geometrisk og aritmetisk vekst.

Den eksplisitte formelen blir da

$$a_n = a_0 \cdot r^n + d \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

for $n \geq 1$

Bevis. Vi setter opp en utledning av de første leddene og generaliserer ut fra det.

$$a_1 = a_0 \cdot r + d$$

$$a_2 = a_1 \cdot r + d = (a_0 \cdot r + d) \cdot r + d = a_0 \cdot r^2 + d \cdot r + d = a_0 \cdot r^2 + d(r + 1)$$

$$a_3 = a_2 \cdot r + d = a_0 \cdot r^3 + d \cdot r^2 + d \cdot r + d = a_0 \cdot r^3 + d(r^2 + r + 1)$$

$$a_4 = a_3 \cdot r + d = a_0 \cdot r^4 + d(r^3 + r^2 + r + 1)$$

$\vdots$

$$a_n = a_0 \cdot r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1)$$

Ser vi på rekka $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}$ er det ei geometrisk rekke hvor første ledd er s_1 og faktoren er k . Summen av de i første leddene i ei geometrisk rekke vil da være gitt ved

$$S_i = s_1 \cdot \frac{1 - k^i}{1 - k}$$

I vårt tilfelle er det n ledd, $s_1 = 1$ og $k = r$. Da vil summen være

$$S_n = 1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Det gir

$$a_n = a_0 \cdot r^n + d(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) = a_0 \cdot r^n + d \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

□

Da har vi både ei differenslikning som kan beskrive kombinasjonsvekst og vi kan finne den eksplisitte formelen ut fra det.

Kombinasjonsvekst

Differenslikninga

$$a_{n+1} = ra_n + d$$

hvor r og d er konstanter som beskriver en kombinasjon av geometrisk og aritmetisk vekst.

Den eksplisitte formelen blir da

$$a_n = a_0 \cdot r^n + d \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

for $n \geq 1$.

Hva om vi ønsker en annen startverdi enn a_0 ? La oss finne den eksplisitte formelen hvis vi starter med a_1 . Da har vi

$$a_2 = a_1 \cdot r + d$$

$$a_3 = a_2 \cdot r + d = (a_1 \cdot r + d) \cdot r + d = a_1 \cdot r^2 + d \cdot r + d = a_1 \cdot r^2 + d(r + 1)$$

$$a_4 = a_3 \cdot r + d = a_1 \cdot r^3 + d \cdot r^2 + d \cdot r + d = a_1 \cdot r^3 + d(r^2 + r + 1)$$

$$a_5 = a_4 \cdot r + d = a_1 \cdot r^4 + d(r^3 + r^2 + r + 1)$$

⋮

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} + d(r^{n-2} + r^{n-3} + \dots + r + 1)$$

Summen av den geometriske rekka blir i dette tilfellet

$$S_{n-1} = 1 \cdot \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$$

Da vil en eksplisitt formel bli

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} + d \left(\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \right)$$

for $n \geq 2$.

Generelt kan vi skrive det som

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} + d \left(\frac{1 - r^{n-k}}{1 - r} \right)$$

for $n \geq k + 1$.

Eksempel: Medisinering

Eksempel 2.1

En pasient tar 100 mg av en medisin. Kroppen bryter ned $\frac{1}{4}$ av medisinen hvert døgn. Finn ei differenslikning som beskriver hvor mye medisin pasienten har i kroppen.

Dette kjenner vi som et eksempel på geometrisk vekst og differenslikninga blir

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot a_n, a_0 = 100$$

Setter vi tallfølga inn i en tabell ser vi hvordan medisinen brytes ned slik at etter 10 dager er det igjen 5.6 mg.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	100	75	56.3	42.2	32.0	23.7	17.8	13.3	10.0	7.5	5.6

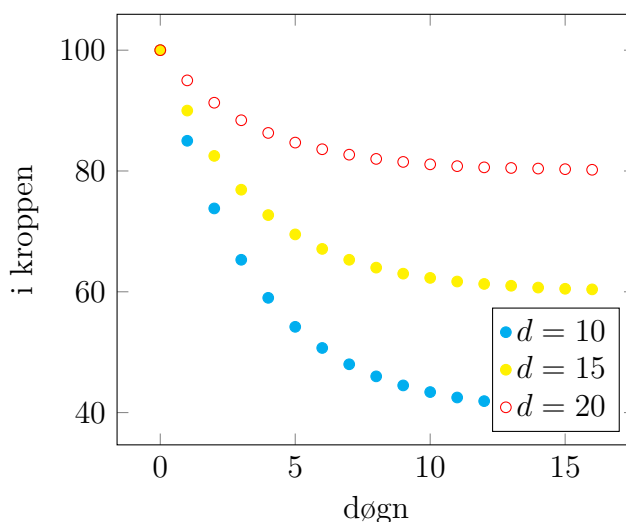
Hva nå om pasienten tar 10 mg av medisinen hver dag? Hvordan går det med innholdet i kroppen da? Eller hva om pasienten tar 20 mg? Da er det en kombinasjonsvekst og differenslikninga blir

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot a_n + d, a_0 = 100$$

hvor d er den dosen pasienten tar hver dag.

Bruk et regneark og legg inn denne differenslikninga og eksperimenter litt. Gjør denne oppgaven.

d	10	15	20
n	a_n	a_n	a_n
0	100.0	100.0	100.0
1	85.0	90.0	95.0
2	73.8	82.5	91.3
3	65.3	76.9	88.4
4	59.0	72.7	86.3
5	54.2	69.5	84.7
6	50.7	67.1	83.6
7	48.0	65.3	82.7
8	46.0	64.0	82.0
9	44.5	63.0	81.5
10	43.4	62.3	81.1
11	42.5	61.7	80.8
12	41.9	61.3	80.6
13	41.4	61.0	80.5
14	41.1	60.7	80.4
15	40.8	60.5	80.3
16	40.6	60.4	80.2



Figur 5.1: Konsentrasjon av medisin

Oppgave 17

Lag et regneark hvor du legger inn differenslikninga for den kombinerte veksten. Prøv med forskjellige verdier for d . Hva skjer?

Prøver vi oss med verdiene $d = 10$, $d = 15$ og $d = 20$ får vi tabellen og plottene i figur 5.1

Vi ser at medisinkonsentrasjonen i kroppen vil etter hvert nærme seg en konstant verdi. Det ser ut som om hvis den daglige dosen er 10 mg vil konsentrasjonen av medisin etter hvert bli omtrent 40 mg.

5.3 Konvergens og divergens

Eksemplet viser at konsentrasjonen av medisin i kroppen vil stabilisere seg: det oppstår en likevekt. Går vi ut fra at det eksisterer en likevektstverdi, a , kan vi sette opp denne likninga

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= ra_n + d \\
a &= ra + d \\
a - ra &= d \\
a &= \frac{d}{1-r}
\end{aligned}$$

Det gir grunnlag for dette teoremet.

Teorem 7

Likevektverdien ved kombinasjonsvekst gitt ved differensiallikninga

$$a_{n+1} = ra_n + d, \quad r \neq 1$$

er gitt ved

$$a = \frac{d}{1-r}$$

Hvis $r = 1$ og $d = 0$ vil alle verdiene være likevektverdier. Hvis $r = 1$ og $d \neq 0$ vil det ikke eksistere en likevektverdi

Da har vi gått ut fra at det fins en likevektsverdi. Det gjør det ikke alltid, men eksisterer den kan vi finne den ved dette teoremet. Hvis differensiallikninga ikke gir en likevektsverdi er det avhengig av verdien av r . Litt eksperimentering, eller matematiske utledninger, gir disse egenskapene for kombinasjonsvekst.

Likevekt ved kombinasjonsvekst

En vekst gitt ved modellen

$$a_{n+1} = ra_n + d$$

hvor $d \neq 0$ vil vokse avhengig av verdien til r

verdien til r	vokser mot
$ r < 1$	en stabil likvekt
$ r > 1$	vokser over alle grenser
$r = 1$	aritmetisk vekst

Oppgave 18

Benytt et hjelpemiddel som regneark og eksperimenter med forskjellige verdier for r og undersøk likevekt.

Oppgave 19

Vi tenker oss at NRK produserer en oppfølger til Skam. Hva skjer med seertallene til den nye serien hvis den får 5000 nye seere for hvert avsnitt mens den samtidig mister 10% av de som ser på?

Oppgave 20

En legemiddelprodusent har laget en ny medisin. Forskning viser at 12 prosent av medisinen brytes ned av kroppen hver sjette time. Legemiddelprodusenten anbefaler at pasienten også tar en dose hver sjette time. Den ønskelige dosen for best effekt er at pasienten har omtrent 250 mg i blodet til en hver tid. Hvor stor dose bør pasienten ta.

Vi lar a_n være mengden av medisinen i kroppen etter at pasienten har tatt dose n . Da vil differenslikninga

$$a_{n+1} = 0.88 \cdot a_n + d$$

gi mengden av medisinen i blodet. d er den repeterende dosen pasienten tar. Når vi har den kan vi prøve oss fram ved å sette inn i et regneark eller benytte andre verktøy. En annen metode er å benytte det vi vet om likevekt. Vi vet at vi ønsker en stabil likevekt lik 250. Det betyr at hvis $a_n = 250$, så skal også $a_{n+1} = 250$. Setter vi det inn i differenslikninga har vi

$$a_{n+1} = 0.88 \cdot a_n + d$$

$$250 = 0.88 \cdot 250 + d$$

$$d = 250 - 0.88 \cdot 250 = 30$$

Et tredje alternativ er å benytte det vi kom fram til ved samme resonnement som i forrige alternativ. Her er $|r| < 1$ og den stabile likevekta vil være gitt ved $a = \frac{d}{1-r}$. Da kan vi regne ut

$$a = \frac{d}{1-r}$$

$$250 = \frac{d}{1-0.88}$$

$$d = 250 \cdot 0.12 = 30$$

Oppgave 21

Vi plasserer en kopp kaffe i et rom hvor temperaturen er 22°C . Da kaffen settes ut er temperaturen 82°C . Vi måler temperaturen etter ett minutt til 79°C

- a. Begrunn at differenslikninga

$$T_{n+1} = T_n + k(T_n - 22)$$

kan modellere temperaturen i koppen

- b. Finn en verdi for k
c. Lag en tabell og et punktplott for differenslikninga

Oppgave 22

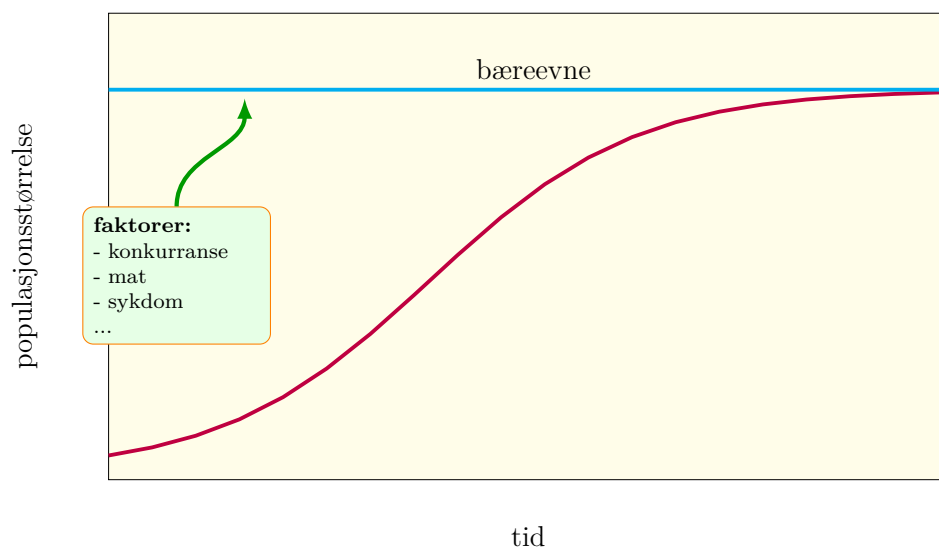
I en feltundersøkelse undersøker noen biologer en innsjø og finner ut at det er 10000 individer av ørret der. Studier viser at bestanden vil øke med 20 prosent per år. De lokale myndighetene bestemmer at det skal gis tillatelse til å fiske 1800 ørret per år.

- a. Finn ei differenslikning som modellerer antall ørret i vannet for hvert år.
b. Bruk differenslikninga til å bestemme hvor lang tid det vil ta før antall ørret er doblet.
c. Tegn et plottdiagram for de neste 15 årene. Kommenter veksten.
d. Anta at det bestemmes at det kan fiskes 2200 ørret per år. Finn ei differenslikning.
e. Tegn et plottdiagram for de neste 15 årene. Kommenter veksten.
f. Anta at det fiskes 2000 ørret i året. Hva vil da skje?

6 Logistisk vekst

6.1 Begrenset vekst

I motsetning til geometrisk vekst vil den logistiske avta og til slutt begrenses mot en bestemt størrelse. Veksttypen ble studert av den belgiske matematikeren Pierre-François Verhulst i 1838. Logistisk vekst gir en S-formet vekstkurve og etter hvert vil den logistiske vekstkurven (Verhulst-kurve) nærme seg en asymptote som er lik bæreevnen (eller bærekapasiteten). Det er antall individer som populasjonen vil bestå av på lang sikt. Bæreevnen reguleres av faktorer som konkurranse mellom individene, tilgang på mat, sykdom, fødsel, innvandring, utvandring osv. En geometrisk vekst vil alltid vokse, enten øke eller minke, og det er ofte en begrensning når vi skal modellere virkeligheten. Ser vi på populasjoner er det typisk at de vokser for så å stabilisere seg. Det leder mot logistisk vekst.

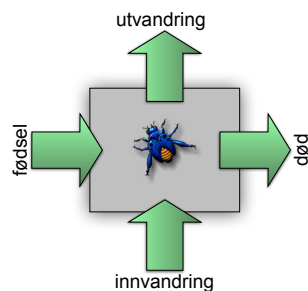


Figur 6.1: Logistisk vekst av en populasjon

Logistisk vekst definerer en tallfølge hvor forandringen fra ledd til ledd bestemmes av en vekstfaktor som er lineært avhengig av størrelsen på populasjonen.

Vi skal holde oss innafor biologien og se på populasjonsstørrelser som eksempler. Da kan det være greit med en liten repetisjon av faktorer som styrer antall

individer i en populasjon. Det bør nok nevnes at studier av populasjonsdynamikk ofte er svært komplekse og at vi forenkler sterkt i denne sammenhengen. Figur 6.2 gir en enkel oppsummering.



Figur 6.2: Faktorer som styrer vekst

6.2 Logistisk vekst som differenslikning

Vi innfører disse symbolene

N_{t+1} størrelsen av den nye populasjonen

N_t størrelsen av den gamle populasjonen

L likevektsverdi

Gitt at forholdene ikke forandrer seg vil populasjonen stabilisere seg på L individer i det lange løp. Så kan vi anta at både antall fødsler, og antallet som dør, er proporsjonalt med antall individer i populasjonen. Det tilgjengelige næringsgrunnlaget hvor populasjonen lever vil kunne forsørge et visst antall individer. Konklusjonen blir at veksten vil avta med økende antall individer og vi kan sette opp denne differenslikninga

$$\Delta N_t = N_{t+1} - N_t = r(L - N_t)N_t$$

r er en faktor bestemt av hvor mange som blir født og dør i populasjonen. Differensen $(L - N_t)$ er en faktor som blir mindre desto nærmere L populasjonen er.

Differenslikninga kan vi skrive om til $N_{t+1} = N_t + r(L - N_t)N_t$

Logistisk vekst

En modell for logistisk vekst kan skrives som

$$N_{t+1} = N_t + r(L - N_t)N_t$$

N_0 er initialpopulasjonen og antall individer vil vokse mot L

Oppgave 23

Lag et regneark hvor modellen $N_{t+1} = N_t + r(L - N_t)N_t$ legges inn. Velg initialverdi $N_0 = 50$, likevektverdi $L = 1000$ og $r = 0.0015$. La regnearket beregne minst 50 elementer og tegn et punktplott.

Oppgave 24

Lag et regneark hvor du kan eksperimentere med denne differenslikninga. La r og L være konstanter i hver sin celle.

Oppgave 25

En populasjon med pungorotter, *Rattus pungotus*, lever i et skogholt. Feltstudier har vist at antallet individer har stabilisert seg på 500 individer. De første tellingene ble gjort i 1920. Da ble det registrert 50 individer. I 1975 ble det registrert 500 individer. Etter det året har antallet holdt seg stabilt på 500 individer.

Finn en verdi for r som modellerer veksten.

Hvor mange individer var det i 1942 etter modellen?

En annen utgave av samme differenslikning

Vi har sett at logistisk vekst kan modelleres med differenslikninga

$$N_{t+1} = N_t + r(L - N_t)N_t$$

Med litt manipulasjon kan vi komme fram til denne versjonen

$$N_{t+1} = r(K - N_t)N_t$$

Overgangen mellom de to typene finner vi ved denne omregninga

$$\begin{aligned}
N_{t+1} &= N_t + r(L - N_t)N_t \\
&= N_t + r \cdot L \cdot N_t - r \cdot N_t^2 \\
&= (1 + r \cdot L)N_t - r \cdot N_t^2 \\
&= (1 + r \cdot L - r \cdot N_t)N_t \\
&= r \left(\frac{1}{r} + L - N_t \right) N_t
\end{aligned}$$

Nå kan vi innføre noen andre konstanter. Husk at konstantene symboliserer tall og da ender vi bare opp med noen andre tall.

$$K = \frac{1}{r} + L$$

Da ender vi opp med

$$N_{t+1} = r(K - N_t)N_t$$

N_0 er initialpopulasjonen og populasjonsstørrelsen kan aldri overstige den teoretiske verdien K . Det betyr at $0 < N_0 < K$. Igjen er r en konstant bestemt av antall fødsler og døde.

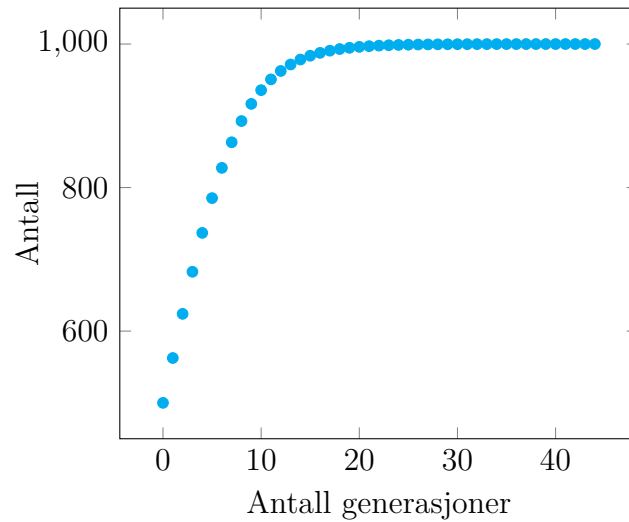
Oppgave 26

Lag et regneark som viser veksten av en populasjon hvor $K = 5000$, $N_0 = 500$ og $r = 0.00025$. Tegn verdiene som punktplott og studer egenskapene

Regnearket og plottet bør bli noe i likhet med tabellen og plottet i figur 6.3. Der ser det ut til at tallfølga konvergerer mot 1000. Det stemmer med den forrige differenslikninga for logistisk vekst hvor likevektsverdien var L . Vi har at $K = \frac{1}{r} + L \implies L = K - \frac{1}{r} = 5000 - \frac{1}{0.00025} = 1000$

Ved gitte betingelser vil populasjonen nå en likevekt hvor $L = K - \frac{1}{r}$. Da vil antall individer i populasjonen være $N_{t+1} = N_t = L$. I tilfelle en likevektsverdi eksisterer kan vi sette opp denne likninga og løse den

t	N_t
0	500.00
1	562.50
2	624.02
3	682.68
4	736.84
5	785.31
6	827.46
7	863.15
8	892.68
9	916.63
10	935.74
20	996.07
30	999.78
40	999.99
50	1000.00



Figur 6.3: Logistisk vekst

$$\begin{aligned}
 L &= r(K - L)L \\
 &= rKL - L^2r \\
 0 &= L + L^2r - rKL \\
 0 &= L(1 + Lr - rK) \\
 L = 0 \vee 1 + Lr - rK &= 0 \\
 L = 0 \vee L &= K - \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

Likevekt inntreffer når $L = 0$ og når $L = K - \frac{1}{r}$.

Vi utvider forrige oppgave og lager et regneark hvor det er mulig å eksperimentere med verdiene

Oppgave 27

Lag et regneark hvor verdiene til K , N_0 og r legges inn i egne celler og hvor verdiene til løsninga av differenslikninga

$$N_{t+1} = r(K - N_t)N_t$$

beregnes.

Tegn verdiene som punktplott. Eksperimenter med forskjellige verdier av K , N_0 og r . Kan du trekke en konklusjon?

Litt eksperimentering viser at mye kan skje når vi forandrer på verdiene i modellen. Det kan vises at

Teorem 8

Anta at en logistisk vekst har differenslikninga

$$N_{t+1} = r(K - N_t)N_t$$

og at $0 < N_0 < K$. Hvis $1 < rK < 3$ vil populasjonen nå en likevektsverdi $L = K - \frac{1}{r}$

Oppgave 28

Stemmer dette med det du fant ved eksperimentering? Sjekk en gang til.

Her er noen observasjoner som vi kan samle opp

Viktige verdier

Anta at en logistisk vekstmodell har differenslikninga

$$N_{t+1} = r(K - N_t)N_t$$

og at $0 < N_0 < K$. Da vil verdiene til r og K bestemme modellen slik

$$rK < 4 \quad \text{vil} \quad 0 < N_t < K$$

$$rK > 4 \quad \text{vil modellen ikke gi realistiske resultat}$$

Oppgave 29

En logistisk vekst er gitt ved differenslikninga

$$a_{n+1} = 0.00016(17500 - a_n)a_n$$

Vil veksten stabilisere seg?

Oppgave 30

Ved et studiested er det 1200 studenter. En av studentene har fått vite at en meget berømt person kommer på besøk. Hun forteller det til én medstudent. Du skal lage en logistisk modell for hvordan nyheten sprer seg blant studentene. Det forutsettes at nyheten overbringes fra én person til en annen og at hver student overbringer den til én annen student hver time (ja, jeg vet det gammeldags, men kommer ikke å noe annet).

La p_n være antall studenter som har hørt nyheten etter n timer. I begynnelsen vil da p_n dobles hver time, men etter hvert som flere studenter har hørt nyheten vil situasjonen forandres siden de kanskje har hørt om det allerede. Formuler ei differenslikning.

6.3 Oppgave: SIR-modell

SIR-modellen er en modell for hvordan epidemier sprer seg i befolkninga som stammer fra 1927. Den ble opprinnelig foreslått av W. O. Kermack og A. G. McKendrick. Se mer ved å søke på nettet. Den deler populasjonen inn i tre kategorier: Susceptible, Infected og Removed.

Kaller vi perioden for n har vi

Uttrykk	Forklaring	Engelsk
S_n	antall som er mottakelige for sykdommen	susceptible
I_n	antall infiserte	infected
R_n	antall som er blitt immune eller er døde	removed

Vi ser på en lukka populasjon hvor det ikke er kontakt med noen andre. Ved starten er hver person enten S eller I .

Vi setter delen av de infiserte som enten dør eller blir immune per uke r , removal rate.

Det betyr at

$$R_{n+1} = R_n + r \cdot I_n$$

Spredningsraten kaller vi s . Den angir en sannsynlighet for hvor stor del av befolkningen som smittes i perioden.

Antall kontakter mellom personer som er mottakelige for sykdommen og de som er infiserte kan vi finne ved $S_n \cdot I_n$. Da har vi

$$S_{n+1} = S_n - a \cdot S_n \cdot I_n$$

Antall personer som er infisert etter n uker blir

$$I_{n+1} = I_n - r \cdot I_n + a \cdot S_n \cdot I_n$$

Oppgave 31

Bruk et regneark og sett opp en modell for R , S og I . Lag celler hvor du kan skrive inn s og a .

Initialverdiene skal det også være mulig å skrive inn i egne celler.

Tegn plotdiagram og eksperimenter.

A Aritmetiske rekker

A.1 Aritmetisk tallfølge

I ei aritmetisk tallfølge er det en fast differanse d mellom hvert ledd slik at den er løsninga av differenslikninga

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Det betyr at hvis $d = 3$ og $a_0 = 7$ vil vi resultatet være

$$\{7, 10, 13, 16, 19, \dots\}$$

A.2 Aritmetisk rekke

Ei rekke er en sum og ei aritmetisk rekke er en sum hvor hvert ledd er ei aritmetisk tallfølge. Med utgangspunkt i forrige tallfølge vil dette være ei aritmetisk rekke

$$7 + 10 + 13 + 16 + 19 + \dots$$

Vi kaller denne rekka for uendelig siden det ikke er et endelig antall ledd.

Ser vi på det generelle leddet a_i i ei slik aritmetisk rekke er det gitt rekursivt av differenslikninga

$$a_i = a_{i-1} + d$$

En eksplisitt formel for det generelle leddet er da gitt ved

$$a_i = a_1 + (i - 1) \cdot d$$

A.3 Summen av ei aritmetisk rekke

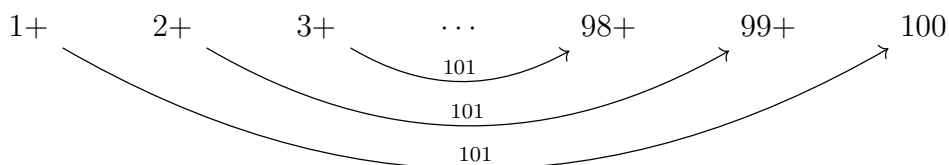
Vi skal nå finne summen av de n første leddene i ei aritmetisk rekke. Da kan det være greit å huske på hva den unge Gauss¹ gjorde. Historien forteller at en læreren var lei av ham og satte ham til å legge sammen de hundre første naturlige tallene. Tanken var at han skulle bruke en del tid på det, men

¹Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855): En tysk matematiker, astronom og fysiker

svaret kom ganske umiddelbart: 5050 Framgangsmåten danner grunnlag for hvordan vi kan finne summen av aritmetiske rekker. Her er oppgaven

$$1 + 2 + 3 + 4 \cdots 97 + 98 + 99 + 100$$

Det Gauss gjorde var at han oppdaget en lur framgangsmåte



Han benyttet en parvis addisjon, i en alder av åtte år, og fikk femti summer som hver var 101. Svaret ble da $50 \cdot 101 = 5050$.

Generelt kan dette gi oss summen av ei aritmetisk rekke med n ledd

Teorem 9

Anta at $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ er ei aritmetisk rekke. Da er

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Bevis. Vi tar utgangspunkt i den generelle endelig aritmetiske rekke og har at

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Arrangerer ledden og får

$$S_n = a_1 + a_n + a_2 + a_{n-1} + a_3 + a_{n-2} + a_4 + a_{n-3} + \cdots$$

Vi har at alle parvise summer er like store

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$$

Antar vi at n er et partall har vi $\frac{n}{2}$ slike summer og får $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$. Hvis n er et oddetall vil vi få $n - 1$ summer og ett ledd som er $\frac{a_1 + a_n}{2}$. Det gir

$$S_n = \frac{n-1}{2} (a_1 + a_n) + \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

□

Et alternativt bevis kan vi også koste på oss

Bevis. Vi starter med samme utgangspunkt

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Denne summen kan vi skrive om

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \quad (1)$$

Det samme kan vi også skrive ved å starte i andre enden

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

Da får vi

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d) \quad (2)$$

Legger sammen (1) og (2) og får

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_n &= a_1 + a_n + (a_1 + d) + (a_n - d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) + (a_n - (n-1)d) \\ &= a_1 + a_n + a_1 + a_n + \cdots + a_1 + a_n \\ &= n \cdot (a_1 + a_n) \\ S_n &= \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

□

B Geometriske rekker

B.1 Geometriske tallfølger

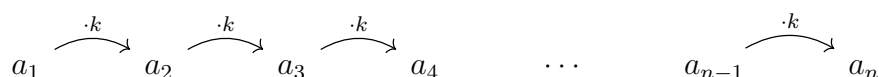
Definisjon 11

En følge $\{a_n\}$ er geometrisk hvis forholdet mellom hvert ledd er konstant for alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$$

k kalles kvotienten til følgen

Vi kan illustrere det på denne måten

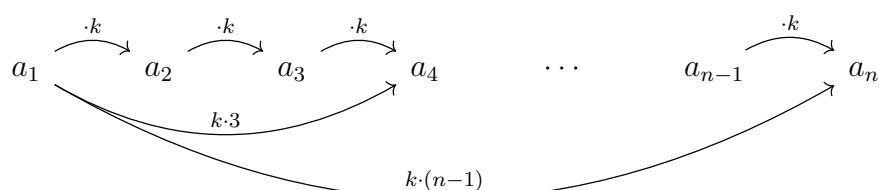


B.2 Geometriske rekker

Ei geometrisk rekke er summen av geometriske tallfølger. Hvis $\{a_n\}$ er en geometrisk tallfølge kan vi skrive en geometrisk rekke slik

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Vi skal nå finne et uttrykk for det generelle leddet a_i i ei geometrisk rekke og tar utgangspunkt i den geometriske tallfølgen. Da kan vi observere at hvert ledd kan uttrykkes med det første leddet



Rekursivt har vi da at $a_i = k \cdot a_{i-1}$ og vi kan uttrykke det generelle leddet som

$$a_i = k^{i-1} \cdot a_1$$

B.3 Summen av de n første leddene

Teorem 10

Summen av de n første leddene i ei geometrisk rekke med kvotient $k \neq 1$ kan vi skrive som

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

Bevis.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + (k \cdot a_1) + (k^2 \cdot a_1) + \cdots + (k^{n-2} \cdot a_1) + (k^{n-1} \cdot a_1) \\ k \cdot S_n &= k \cdot (a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-2} \cdot a_1 + k^{n-1} \cdot a_1) \\ k \cdot S_n &= k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1 + k^n \cdot a_1 \end{aligned}$$

Subtraherer $k \cdot S_n$ fra S_n

$$\begin{aligned} S_n - k \cdot S_n &= a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1 - k \cdot a_1 - k^2 \cdot a_1 - \cdots - k^{n-1} \cdot a_1 - k^n \cdot a_1 \\ S_n - k \cdot S_n &= a_1 - k^n \cdot a_1 \\ S_n(1 - k) &= a_1(1 - k^n) \\ S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} \end{aligned}$$

□



Creative Commons Navngivelse-IkkeKommersiell-DelPåSammeVilkår 4.0

Laget med L^AT_EX